A. PHILIPPOV

RECUEIL DE PROBLÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES



А. Ф. ФИЛИППОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

«ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

A. PHILIPPOV

RECUEIL DE PROBLÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

EDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe par G. PETROSSOV

На французском языке

TABLE DES MATIÈRES

Préface 7
§ 1. Isoclines. Equations différentielles d'une famille de courbes 9
§ 2. Equations différentielles à variables séparables 12
§ 3. Problèmes géométriques et de physique 13
§ 4. Equations homogènes 19
§ 5. Equations linéaires du premier ordre 21
§ 6. Equations aux différentielles totales. Facteur intégrant . . . 25
§ 7. Existence et unicité d'une solution 28
§ 8. Equations non résolues par rapport à la dérivée 32
§ 9. Diverses équations du premier ordre. 37
§ 10. Cas d'abaissement de l'ordre 39
§ 11. Equations linéaires à coefficients constants 43
§ 12. Equations linéaires à coefficients variables 54
§ 13. Problèmes aux limites 61
§ 14. Systèmes linéaires à coefficients constants 64
§ 15. Stabilité 77
§ 16. Points singuliers 86
§ 17. Plan des phases 92
§ 18. Dépendance de la solution par rapport aux conditions initiales et paramètres. Solutions approchées des équations différentielles 96
§ 19. Systèmes non linéaires 105
§ 20. Equations aux dérivées partielles du premier ordre 108

Réponses 113
Tables de la fonction exponentielle e^x et des logarithmes 136

PRÉFACE

Le présent ouvrage est un recueil de problèmes d'équations différentielles ordinaires, conforme au programme d'études de la faculté de mécanique et de mathématiques de l'Université de Moscou. Il renferme, entre autres, des problèmes tirés des recueils connus de N. Gunter et R. Kouzmine, de G. Berman, M. Krasnov et G. Makarenko, ainsi que des manuels de V. Stépanov et de G. Philips, dont la plupart ont été remaniés. Ce recueil contient plus d'exercices que celui de Gunter et Kouzmine et la graduation de leur complexité permet un bon entraînement. Ce recueil comporte également des problèmes relatifs aux parties du cours général qui manquent dans celui de Gunter et Kouzmine (par exemple, isoclines, points singuliers, stabilité au sens de Liapounov) et un certain nombre de problèmes théoriques permettant au lecteur de juger s'il a bien assimilé les principaux théorèmes et s'il sait les appliquer.

Les problèmes plus compliqués sont marqués d'un astérisque.

Enfin, le recueil est complété d'un nombre relativement petit de problèmes permettant d'approfondir plus que ne l'exige le programme certaines questions du cours (solutions asymptotiques des équations linéaires du deuxième ordre, résolution des équations à l'aide de séries, stabilité, solutions approchées des équations différentielles).

Chaque paragraphe commence par la formulation des méthodes principales de résolution des problèmes ou renvoie le lecteur aux manuels correspondants. Dans certains cas, on donne des solutions détaillées des problèmes types. Le recueil prévoit l'usage des manuels de V. Stépanov « Cours d'équations différentielles », de L. Elsgoltz « Equations différentielles et calcul variationnel ». On peut également se servir des manuels de I. Pétrovski « Cours théorique d'équations différentielles ordinaires », de L. Pontriaguine « Equations différentielles ordinaires » *), de V. Arnold « Cours d'équations différentielles ordinaires» **).

---

*) Traduction française par les Editions Mir, 1975.
**) Idem, 1974.

Références:

[1] — V. Stépanov « Cours d'équations différentielles » (en russe). QA37/N413
[2] — I. Pétrovski « Cours théorique d'équations différentielles ordinaires » (en russe).
[3] — L. Pontriaguine « Equations différentielles ordinaires » (traduction française, 1975).
[4] — L. Elsgoltz «Equations différentielles et calcul variationnel » (en russe).
[5] — B. Démidovitch « Théorie mathématique de la stabilité » (en russe).

L'auteur serait très reconnaissant aux lecteurs de bien vouloir lui adresser leurs remarques sur le contenu de ce recueil.

A. Philippov

§ 1. Isoclines. Equation différentielle d'une famille de courbes

1. La solution de l'équation $y' = f(x, y)$ passant par le point (x, y) doit avoir en ce point une dérivée y' égale à $f(x, y)$, c'est-à-dire qu'elle doit être tangente à une droite formant avec l'axe Ox un angle $\alpha = \operatorname{arc\,tg} f(x, y)$. On appelle isocline le lieu géométrique des points du plan (x, y) en lesquels la pente des tangentes aux solutions de l'équation $y' = f(x, y)$ a une valeur constante. Par conséquent, l'équation de l'isocline s'écrit $f(x, y) = k$, où k est une constante.

Si l'on veut définir approximativement les solutions de l'équation $y' = f(x, y)$, on peut tracer un nombre suffisant d'isoclines, ensuite construire les courbes solutions qui, aux points d'intersection avec les isoclines $f(x, y) = k_1$, $f(x, y) = k_2$, . . . présentent des tangentes respectivement de coefficients angulaires $k_1, k_2, \ldots$ Pour les applications de la méthode ci-dessus, cf. [1], chapitre I, § 1, point 3 ou [4], chapitre I, § 1.

2. Pour établir une équation différentielle susceptible d'être vérifiée par les courbes de la famille

$$\varphi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{1}$$

il convient de dériver n fois l'équation (1), en prenant y comme fonction de x, et d'éliminer ensuite entre les équations obtenues et l'équation (1) les constantes arbitraires $C_1, \ldots, C_n$.

E x e m p l e. Etablir l'équation différentielle de la famille de courbes

$$C_1x + (y - C_2)^2 = 0. \tag{2}$$

Comme l'équation de la famille comporte deux paramètres, on la dérive deux fois, en posant $y = y(x)$:

$$C_1 + 2(y - C_2)y' = 0, \tag{3}$$

$$2y'^2 + 2(y - C_2)y'' = 0. \tag{4}$$

Eliminons C_1. De l'équation (3) on déduit $C_1 = -2(y - C_2)y'$; portant ensuite dans (2) on obtient:

$$-2xy'(y - C_2) + (y - C_2)^2 = 0. \tag{5}$$

Eliminons C_2. De l'équation (4) on tire $y - C_2 = -y'^2/y''$; en le portant dans (5), on obtient après simplifications l'équation différentielle

$$y' + 2xy'' = 0.$$

3. Les lignes coupant toutes les courbes d'une famille donnée sous un même angle φ sont appelées trajectoires isogonales. Les angles β et α formés respectivement par la trajectoire et la courbe avec l'axe Ox sont liés par la relation $\beta = \alpha \pm \varphi$. Soit

$$y' = f(x, y) \qquad (6)$$

l'équation différentielle de la famille de courbes donnée, et

$$y' = f_1(x, y) \qquad (7)$$

l'équation de la famille de trajectoires isogonales. Alors $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$, $\operatorname{tg} \beta = f_1(x, y)$. Par conséquent, si l'équation (6) est écrite et l'angle φ connu, il est aisé de trouver $\operatorname{tg} \beta$ et d'écrire ensuite l'équation différentielle des trajectoires (7).

L'équation de la famille de courbes donnée étant

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (8)$$

pour établir celle des trajectoires isogonales on peut éviter de résoudre l'équation (8) par rapport à y'. Dans ce cas, il convient de substituer dans l'équation (8) y' à $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\beta \mp \varphi)$, où $\operatorname{tg} \beta = y'$ est le coefficient angulaire de la tangente à la trajectoire.

Si, d'autre part, l'équation de la famille de courbes est de la forme $\varphi(x, y, C) = 0$, on doit d'abord établir l'équation différentielle de cette famille et ensuite l'équation différentielle des trajectoires.

Construire, à l'aide d'isoclines, les solutions approchées des équations:

1. $y' = y - x^2$. 2. $2(y + y') = x + 3$.

3. $y' = \frac{x^2+y^2}{2} - 1$. 4. $(y^2 + 1)\, y' = y - x$.

5. $yy' + x = 0$. 6. $xy' = 2y$.

7. $xy' + y = 0$. 8. $y' + y = (x - y')^3$.

9. $y' = x - e^y$. 10. $y(y' + x) = 1$.

11. $y' = \frac{y-3x}{x+3y}$. 12. $y' = \frac{y}{x+y}$.

13. $x^2 + y^2 y' = 1$. 14. $(x^2 + y^2)\, y' = 4x$.

15. Ecrire l'équation du lieu géométrique des points extrémums (x, y) (maximum ou minimum) des solutions de l'équation $y' = f(x, y)$. Comment distinguer ces points entre eux?

16. Ecrire l'équation du lieu géométrique des points de courbure des graphiques de solutions des équations:
a) $y' = y - x^2$; b) $y' = x - e^y$; c) $x^2 + y^2y' = 1$; d) $y' = f(x, y)$.

Etablir les équations différentielles des familles de courbes:

17. $y = e^{Cx}$.
18. $y = (x - C)^3$.
19. $y = Cx^3$.
20. $y = \sin(x + C)$.
21. $x^2 + Cy^2 = 2y$.
22. $y^2 + Cx = x^3$.
23. $y = C(x - C)^2$.
24. $Cy = \sin Cx$.
25. $y = ax^2 + be^x$.
26. $(x - a)^2 + by^2 = 1$.
27. $\ln y = ax + by$.
28. $y = ax^3 + bx^2 + cx$.
29. $x = ay^2 + by + c$.

30. Etablir l'équation différentielle des cercles de rayon 1 centrés sur la droite $y = 2x$.

31. Etablir l'équation différentielle des paraboles d'axe parallèle à Oy et tangentes simultanément aux droites $y = 0$ et $y = x$.

32. Ecrire l'équation différentielle des cercles tangents simultanément aux droites $y = 0$ et $x = 0$ et situés dans les premier et troisième quadrants.

33. Ecrire l'équation différentielle de toutes les paraboles d'axe parallèle à Oy et passant par l'origine des coordonnées.

34. Etablir l'équation différentielle de tous les cercles tangents e des abscisses.

Trouver les systèmes d'équations différentielles vérifiées par les courbes des familles:

35. $ax + z = b, \quad y^2 + z^2 = b^2$.
36. $x^2 + y^2 = z^2 - 2bz; \quad y = ax + b$.

Trouver les équations différentielles *) des trajectoires coupant sous un angle donné φ les courbes de la famille:

37. $y = Cx^4$, $\varphi = 90°$.
38. $y^2 = x + C$, $\varphi = 90°$.
39. $x^2 = y + Cx$, $\varphi = 90°$.
40. $x^2 + y^2 = a^2$, $\varphi = 45°$.
41. $y = kx$, $\varphi = 60°$.
42. $3x^2 + y^2 = C$; $\varphi = 30°$.
43. $y^2 = 2px$, $\varphi = 60°$.
44. $r = a + \cos\theta$, $\varphi = 90°$.
45. $r = a\cos^2\theta$, $\varphi = 90°$.
46. $r = a\sin\theta$, $\varphi = 45°$.
47. $y = x\ln x + Cx$, $\varphi = \operatorname{arc\,tg} 2$.
48. $x^2 + y^2 = 2ax$, $\varphi = 45°$.
49. $x^2 + C^2 = 2Cy$, $\varphi = 90°$.
50. $y = Cx + C^3$, $\varphi = 90°$.

*) Les équations qu'on obtient dans les problèmes nos 37 à 50 peuvent être résolues par les méthodes qui font l'objet des paragraphes suivants.

§ 2. Equations différentielles à variables séparables

1. Les équations à variables séparables peuvent s'écrire sous la forme:

$$y' = f(x)\, g(y), \tag{1}$$

ou encore

$$M(x)\, N(y)\, dx + P(x)\, Q(y)\, dy = 0. \tag{2}$$

Pour résoudre cette équation, il faut multiplier ou diviser ses deux membres par une expression telle que l'on obtienne dans l'un uniquement des x et dans l'autre, des y, et, ensuite, intégrer les deux membres.

La division des deux membres de l'équation par une expression contenant les inconnues x et y peut entraîner la perte des solutions annulant cette expression.

E x e m p l e. Résoudre l'équation

$$x^2y^2y' + 1 = y. \tag{3}$$

Mettons l'équation sous la forme (2):

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1; \quad x^2y^2\,dy = (y-1)\,dx.$$

Divisons les deux membres de l'équation par $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}\,dy = \frac{dx}{x^2}.$$

Nous avons ainsi séparé les variables. En intégrant les deux membres de l'équation, on obtient:

$$\int \frac{y^2}{y-1}\,dy = \int \frac{dx}{x^2}; \quad \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

La division des deux membres par $x^2(y-1)$ conduirait à la perte des solutions $x = 0$ et $y - 1 = 0$, c'est-à-dire $y = 1$. De toute évidence, $y = 1$ est solution de l'équation (3), alors que $x = 0$ ne l'est pas.

2. Les équations de la forme $y' = f(ax + by)$ se ramènent aux équations à variables séparables par substitution de $z = ax + by$ (ou de $z = ax + by + c$, où c est une constante arbitraire).

Résoudre les équations données et construire pour chacune d'elles quelques courbes intégrales. Trouver également les solutions vérifiant les conditions initiales (ceci concerne les problèmes où ces conditions sont énoncées):

51. $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0.$

52. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy.$

53. $(x^2-1)\,y' + 2xy^2 = 0;\ y(0) = 1.$

54. $y' \cot g\, x + y = 2$; $y(0) = -1$.

55. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$; $y(2) = 0$.

56. $xy' + y = y^2$; $y(1) = 0,5$.

57. $2x^2yy' + y^2 = 2$.

58. $y' - xy^2 = 2xy$.

59. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$.

60. $z' = 10^{x+z}$.

61. $x\frac{dx}{dt} + t = 1$.

62. $y' = \cos(y - x)$.

63. $y' - y = 2x - 3$.

64. $(x + 2y)\, y' = 1$; $y(0) = -1$.

65. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

Trouver les solutions des équations satisfaisant aux conditions énoncées pour $x \to +\infty$:

66. $x^2y' - \cos 2y = 1$; $y(+\infty) = 9\pi/4$.

67. $3y^2y' + 16x = 2xy^3$; $y(x)$ est limité pour $x \to +\infty$.

68. Déterminer les trajectoires orthogonales aux courbes des familles suivantes: a) $y = Cx^2$; b) $y = Ce^x$; c) $Cx^2 + y^2 = 1$.

Dans les problèmes ci-dessous, les variables sont séparables, cependant les intégrales obtenues ne s'expriment pas par des fonctions élémentaires. Toutefois, l'étude de leur convergence permet de répondre aux questions posées.

69*. Montrer que chaque courbe intégrale de l'équation $y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}}$ possède deux asymptotes horizontales.

70*. Etudier les courbes intégrales de l'équation $y' = \sqrt{\frac{\ln(1+y)}{\sin x}}$ au voisinage de l'origine des coordonnées. Montrer que chaque point de la frontière du premier quadrant est le point de départ d'une seule courbe intégrale comprise dans cet angle.

§ 3. Problèmes géométriques et de physique*)

1. Pour résoudre les problèmes géométriques ci-dessous, il convient de construire le graphique, de désigner la courbe cherchée par $y = y(x)$ (si on résout le problème en coordonnées rectangulaires) et d'exprimer par x, y et y' toutes les grandeurs mentionnées dans le problème. Alors, la relation fournie par l'énoncé

*) Tous les problèmes de ce paragraphe se ramènent aux équations à variables séparables. Les problèmes qui conduisent à d'autres types d'équations font l'objet des paragraphes correspondants. Les valeurs de la fonction exponentielle et des logarithmes nécessaires à la résolution des problèmes sont données dans les tables à la fin du recueil.

du problème se transforme en une équation différentielle dont on peut déduire la fonction $y(x)$ cherchée.

2. Pour ce qui est des problèmes de physique, il convient de définir avant tout la grandeur qui sera prise pour variable indépendante, et celle qui sera prise pour fonction inconnue. Ensuite, il faut étudier la variation de la fonction y cherchée par rapport à Δx, c'est-à-dire exprimer la différence $y(x + \Delta x) - y(x)$ en fonction des grandeurs données. En divisant cette différence par Δx et en passant à la limite pour $\Delta x \to 0$, on obtient une équation différentielle dont on peut déduire la fonction cherchée.

La plupart des problèmes renferment des conditions permettant de définir les valeurs des constantes qui figurent dans la solution générale de l'équation différentielle. Celle-ci peut parfois être établie d'une manière plus simple, moyennant la signification physique de la dérivée (si la variable indépendante est le temps t, alors $\frac{dy}{dt}$ est la vitesse de variation de y).

Dans certains problèmes, l'écriture de l'équation fait intervenir des lois de physique formulées dans le texte qui précède le problème (ou le groupe de problèmes).

E x e m p l e. Une solution aqueuse dont la salinité est de 0,3 kg par litre, se déverse à une vitesse de 2 litres à la minute dans un réservoir contenant 10 litres d'eau. Le mélange s'écoule du réservoir à la même vitesse. Déterminer la quantité de sel que contiendra le réservoir au bout de 5 minutes.

S o l u t i o n. Prenons le temps t pour variable indépendante, et la fonction cherchée $y(t)$ pour quantité de sel contenue dans le réservoir t minutes après le commencement de l'expérience. Cherchons à définir la variation de la quantité de sel dans l'intervalle de temps compris entre t et $t + \Delta t$. Le réservoir se remplit en une minute de 2 litres de solution, et, par conséquent, en Δt minutes de $2\Delta t$ litres, lesquels contiennent $0{,}3 \cdot 2\Delta t = 0{,}6\Delta t$ kg de sel. D'autre part, pendant le temps Δt le réservoir se vide de $2\Delta t$ litres de solution. Dans le réservoir contenant 10 litres d'eau à l'instant t il y a $y(t)$ kg de sel, donc les $2\Delta t$ litres de solution qui s'écoulent contiendraient $0{,}2\Delta t \cdot y(t)$ kg de sel, si la quantité de sel dans le réservoir restait inchangée au bout du temps Δt. Etant donné que, pour $\Delta t \to 0$, elle change pendant ce temps d'une valeur infiniment petite, on a dans les $2\Delta t$ litres de solution qui s'écoule $0{,}2\Delta t\,(y(t) + \alpha)$ kg de sel, où $\alpha \to 0$, pour $\Delta t \to 0$.

Ainsi, la solution se déversant dans le réservoir dans le temps $(t, t + \Delta t)$ contient $0{,}6\Delta t$ kg de sel, alors que le mélange qui en sort en comprend $0{,}2\Delta t \cdot (y(t) + \alpha)$ kg. L'accroissement de la quantité de sel dans le temps $y(t + \Delta t) - y(t)$ est égal à la différence des grandeurs obtenues, c'est-à-dire:

$$y(t + \Delta t) - y(t) = 0{,}6\Delta t - 0{,}2\Delta t \cdot (y(t) + \alpha).$$

En divisant par Δt et en passant à la limite quand $\Delta t \to 0$, on obtient dans le premier membre la dérivée $y'(t)$ et dans le second $0{,}6 - 0{,}2y(t)$, car $\alpha \to 0$ pour $\Delta t \to 0$.

On aboutit finalement à une équation différentielle $y'(t) = 0{,}6 - 0{,}2y(t)$. En intégrant, on trouve

$$y(t) = 3 - Ce^{-0,2t}. \qquad (1)$$

Etant donné que, pour $t = 0$, le réservoir ne contenait pas de sel, on a donc $y(0) = 0$. Portant $t = 0$ dans (1), on obtient $y(0) = 3 - C$; $0 = 3 - C$; $C = 3$, qui, porté dans (1), donne $y(t) = 3 - 3e^{-0,2t}$. Pour $t = 5$, la quantité de sel dans le réservoir sera

$$y(5) = 3 - 3e^{-0,2\cdot 5} = 3 - 3e^{-1} \approx 1{,}9 \text{ kg}.$$

71. Trouver les courbes telles que l'aire du triangle formé par une tangente, l'ordonnée du point de tangence et l'axe des abscisses soit une constante égale à a^2.

72. Trouver les courbes telles que la somme des côtés du triangle du problème précédent soit une constante égale à b.

73. Trouver les courbes jouissant de la propriété suivante: la portion de l'axe des abscisses coupée par une tangente et une normale issues d'un point arbitraire de la courbe est égale à $2a$.

74. Trouver les courbes telles que l'abscisse du point d'intersection de toute tangente avec l'axe des abscisses soit la moitié de celle du point de tangence.

75. Trouver les courbes jouissant de la propriété suivante: si par un point quelconque d'une de ces courbes on mène deux droites parallèles aux axes de coordonnées, alors l'aire du rectangle obtenu est partagée par la courbe dans le rapport 1 : 2.

76. Trouver les courbes dont les tangentes en tout point forment des angles égaux avec le rayon et l'axe polaires.

Dans les exercices n[os] 77 à 79 on supposera que le gaz (ou le fluide) introduit dans un volume, à force de se mélanger, finit par se répartir uniformément dans tout le volume.

77. Un réservoir d'une contenance de 20 litres renfermant de l'air (80 % d'azote et 20 % d'oxygène) reçoit 0,1 litre d'azote par seconde. La même quantité de mélange s'écoule du réservoir. Dans combien de temps le réservoir contiendra 99 % d'azote?

78. Un réservoir contient une solution de 100 litres d'eau mélangée à 10 kg de sel. L'eau coule dans le réservoir, se mélange à la solution et sort à la même vitesse de 5 litres à la minute. Déterminer la quantité de sel que contiendra le réservoir au bout d'une heure.

79. L'air d'un local de 200 m^3 contient 0,15 % de gaz carbonique (CO_2). Le ventilateur débite à la minute 20 m^3 d'air d'une teneur en CO_2 de 0,04 %. En combien de temps la quantité de gaz carbonique dans l'air du local diminuera-t-elle trois fois?

Dans les problèmes 80 à 82 on suppose que la vitesse de refroidissement (ou d'échauffement) du corps est proportionnelle à la différence de température du corps et du milieu ambiant.

80. Un corps chauffé à 100° s'est refroidi en l'espace de 10 minutes jusqu'à 60°. En combien de temps la température du corps baissera-t-elle jusqu'à 25°, si la température ambiante est maintenue à 20°?

81. Un objet en aluminium de 0,5 kg de masse, de chaleur spécifique 0,2, chauffé à 75°, est plongé dans un réservoir contenant un litre d'eau à la température de 20°. Au bout d'une minute la température de l'eau s'élève de 2°. En combien de temps la différence de température de l'objet et de l'eau sera-t-elle de 1°? On négligera les pertes de chaleur dues à l'échauffement du réservoir.

82. Un morceau de métal chauffé à a degrés est placé dans un four dont la température s'élève progressivement de a à b degrés. Quand la différence de température du four et du métal atteint T degrés, la vitesse d'échauffement du métal est de l'ordre de kT degrés à la minute. Déterminer la température du métal au bout d'une heure.

83. Le mouvement d'un canot est freiné par la résistance de l'eau qui est proportionnelle à la vitesse de ce mouvement. Sa vitesse initiale égale à 1,5 m/s devient 1 m/s au bout de 4 secondes. Dans combien de temps diminuera-t-elle jusqu'à 1 cm/s et quelle distance parcourra le canot avant de s'immobiliser?

Dans les problèmes 84 à 86 on utilisera la loi de désintégration radioactive: la quantité de matière radioactive se désintégrant par unité de temps est proportionnelle à la quantité de matière restante.

84. La désintégration de 50 % de matière radioactive s'est produite en 30 jours. Dans combien de temps restera-t-il 1 % de toute la quantité initiale?

85. Selon les expériences, la désintégration annuelle du radium est de l'ordre de 0,44 mg par gramme. En combien d'années la moitié de toute la réserve de radium se désintégrera-t-elle?

86. Un morceau de roche contient 100 mg d'uranium et 14 mg de plomb d'uranium. On sait que l'uranium met $4{,}5 \cdot 10^9$ années pour se désintégrer à moitié et que la désintégration com-

plète de 238 g d'uranium donne 206 g de plomb. Déterminer l'âge de la roche. On admettra qu'au moment de sa formation elle ne contenait pas de plomb et on négligera la présence de produits radioactifs intermédiaires entre l'uranium et le plomb (car leur désintégration est beaucoup plus rapide que celle de l'uranium).

87. La quantité de lumière absorbée par une faible couche d'eau est proportionnelle à la quantité de lumière incidente et à l'épaisseur de la couche. Une couche d'eau de 35 cm d'épaisseur absorbe la moitié de la lumière incidente. On demande de trouver la quantité de lumière qu'absorbera une couche d'eau de 2 m d'épaisseur.

Pour écrire l'équation différentielle dans les problèmes 88 à 90 il est plus commode de prendre la vitesse comme fonction inconnue, en admettant l'accélération de la force de pesanteur égale à 10 m/s^2.

88. Un parachutiste a sauté d'une hauteur de 1,5 km et n'a ouvert son parachute qu'à 0,5 km du sol. Calculer la durée de sa chute avant l'ouverture du parachute. On sait que la vitesse maximale de chute de l'homme en l'air de densité normale est de 50 m/s. On négligera la variation de la densité avec la hauteur. La résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse.

89. Un ballon de football de 0,4 kgf est lancé en l'air verticalement avec une vitesse de 20 m/s. La résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vitesse et égale à 0,48 gf lorsque la vitesse est de 1 m/s. Calculer la durée d'ascension du ballon et la hauteur maximale qu'il atteint. Comment changeront ces dernières si l'on néglige la résistance de l'air?

90. Calculer la durée de chute du ballon, sans vitesse initiale, d'une hauteur de 16,3 m en tenant compte de la résistance de l'air (cf. problème n° 89). Déterminer sa vitesse en fin de chute.

Dans les problèmes n°s 91 à 95, on admettra que le fluide s'écoule du réservoir à une vitesse de $0{,}6\sqrt{2gh}$, où $g = 10$ m/s^2 est l'accélération de la force de pesanteur et h la hauteur du niveau d'eau au-dessus de l'orifice.

91. Combien de temps l'eau, contenue dans un réservoir de diamètre $2R = 1{,}8$ m et de hauteur $H = 2{,}45$ m, mettra-t-elle à s'échapper par un orifice de $2r = 2$ cm de diamètre pratiqué à son fond? L'axe du cylindre est vertical.

92. Résoudre le problème précédent en supposant l'axe du cylindre horizontal, l'orifice pratiqué dans la partie la plus basse du cylindre.

93. Un réservoir cylindrique posé verticalement est rempli d'eau. Par un orifice pratiqué à la base, le réservoir se vide de la moitié de son eau au bout de 5 minutes. En combien de temps se videra-t-il complètement?

94. Un entonnoir de forme conique, de rayon $R = 6$ cm et de hauteur $H = 10$ cm est rempli d'eau. Combien de temps mettra-t-il à se vider si son orifice a 0,5 cm de diamètre?

95. Soit un réservoir parallélépipédique de base 60 cm $\times$ $\times$ 75 cm et de hauteur 80 cm qu'on remplit d'eau à un débit de 1,8 litres par seconde. Un orifice de 2,5 cm² est pratiqué à sa base. En combien de temps sera-t-il plein d'eau? Comparer la réponse avec le temps de remplissage du même réservoir sans orifice au fond.

96. Une corde en caoutchouc longue de 1 m s'allonge de kf mètres sous l'action d'une force de f kgf. Déterminer l'allongement d'une autre corde de longueur l et de poids P sous l'action de son propre poids, si elle est suspendue par l'une de ses extrémités.

97. Déterminer la pression atmosphérique à l'altitude h, étant donné qu'à la surface terrestre elle est de l'ordre de 1 kgf/cm² et que la densité de l'air est de 0,0012 g/cm³. Appliquer la loi de Boyle-Mariotte suivant laquelle la densité est proportionnelle à la pression (c'est-à-dire négliger la variation de la température avec l'altitude).

98. Pour retenir en place un bateau on fixe une amarre, en la tournant sur un taquet. Calculer la force qui freine le bateau lorsque l'amarre a fait trois tours de taquet, en sachant que le coefficient de frottement de l'amarre sur le taquet est égal à 1/3 et que l'on tire l'amarre par son extrémité avec une force de 10 kgf.

99. Un réservoir ouvert, plein d'eau, se trouve dans un local fermé de v m³. La vitesse d'évaporation de l'eau est proportionnelle à la différence entre la quantité q_1 de vapeur d'eau saturant 1 m^3 d'air à la température donnée et la quantité q de vapeur d'eau contenue dans l'air au moment donné (on admet que la température de l'air et de l'eau, ainsi que la grandeur de l'aire dont elle s'évapore restent inchangées). Au début, le réservoir contenait m_0 grammes d'eau, alors que 1 m³ d'air, q_0 grammes de vapeur. Combien d'eau restera-t-il dans le réservoir au bout d'un temps t?

100. La masse d'une fusée avec combustible est égale à M et sans combustible à m, la vitesse d'échappement des produits de combustion est égale à c, la vitesse initiale de la fusée est nulle. Trouver la vitesse de la fusée en fin de combustion, en négligeant la force de pesanteur et la résistance de l'air (formule de Tsiolkovski).

§ 4. Equations homogènes

1. Les équations homogènes peuvent s'écrire sous la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ou encore $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, où $M(x, y)$ et $N(x, y)$ sont des fonctions homogènes de même ordre *). Pour résoudre une équation homogène, on peut substituer $y = tx$ et obtenir ainsi une équation à variables séparables.

Exemple. Résoudre l'équation $x\,dy = (x + y)\,dx$.

Cette équation est homogène. Posons $y = tx$, alors $dy = t\,dx + x\,dt$; portant dans l'équation, il vient:

$$x(x\,dt + t\,dx) = (x + tx)\,dx; \quad x\,dt = dx.$$

Résolvons l'équation trouvée à variables séparables:

$$dt = \frac{dx}{x}; \quad t = \ln|x| + C.$$

En revenant à la variable y, on obtient $y = x(\ln|x| + C)$. Il existe encore une solution $x = 0$ qu'on avait perdue en divisant par x.

2. L'équation de la forme $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$ se ramène à une équation homogène par déplacement de l'origine des coordonnées au point d'intersection des droites $ax + by + c = 0$ et $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Si, d'autre part, ces droites ne se coupent pas, alors $a_1x + b_1y = k(ax + by)$ et, par conséquent, l'équation prend la forme $y' = F(ax + by)$ et se ramène à une équation à variables séparables par substitution de $z = ax + by$ (ou $z = ax + by + c$) (cf. § 2, point 2).

3. Certaines équations peuvent être rendues homogènes par substitution de $y = z^m$, où m est en général inconnu. On le trouve en substituant $y = z^m$. Exigeant l'homogénéité de l'équation, recherchons le nombre m, si cela est possible. Dans le cas contraire, l'équation ne se ramène pas, par cette méthode, à une équation homogène.

Exemple. Soit donnée une équation $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$. La substitution de $y = z^m$ la mettra sous la forme $2mx^4z^{2m-1}z' + z^{4m} = 4x^6$. Cette équation ne sera homogène que si les puissances de tous ses termes sont les mêmes, c'est-à-dire $4 + (2m - 1) = 4m = 6$. Ces égalités sont vérifiées sumultanément à condition que $m = 3/2$. Par conséquent, l'équation peut se ramener à une équation homogène par substitution de $y = z^{3/2}$.

---

*) La fonction $M(x, y)$ est dite homogène du n-ième ordre, si, pour tous les $k > 0$, on a $M(kx, ky) \equiv k^n M(x, y)$.

Résoudre les équations:

101. $(x + 2y)\, dx - x\, dy = 0$.

102. $(x - y)\, dx + (x + y)\, dy = 0$.

103. $(y^2 - 2xy)\, dx + x^2\, dy = 0$.

104. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$.

105. $y^2 + x^2y' = xyy'$.

106. $(x^2 + y^2)\, y' = 2xy$.

107. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

108. $xy' = y - xe^{y/x}$.

109. $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x+y}{x}$.

110. $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$.

111. $(y + \sqrt{xy})\, dx = x\, dy$.

112. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

113. $(2x - 4y + 6)\, dx + (x + y - 3)\, dy = 0$.

114. $(2x + y + 1)\, dx - (4x + 2y - 3)\, dy = 0$.

115. $x - y - 1 + (y - x + 2)\, y' = 0$.

116. $(x + 4y)\, y' = 2x + 3y - 5$.

117. $(y + 2)\, dx = (2x + y - 4)\, dy$.

118. $y' = 2 \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2$.

119. $(y' + 1) \ln \frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}$.

120. $y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg} \frac{y-2x}{x+1}$.

121. $x^3 (y' - x) = y^2$.

122. $2x^2y' = y^3 + xy$.

123. $2x\, dy + (x^2y^4 + 1)\, y\, dx = 0$.

124. $y\, dx + x(2xy + 1)\, dy = 0$.

125. $2y' + x = 4\sqrt{y}$.

126. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$.

127. $2xy' + y = y^2 \sqrt{x - x^2y^2}$.

128. $\frac{2}{3} xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$.

129. $2y + (x^2y + 1)\, xy' = 0$.

130. Trouver les trajectoires coupant les courbes d'une famille donnée sous un angle de 45°, en comptant l'angle formé par la tangente à la courbe et la tangente à la trajectoire dans le sens des valeurs négatives:

a) $y = x \ln Cx$; b) $(x - 3y)^4 = Cxy^6$.

131. Trouver une courbe telle que le point d'intersection de toute tangente avec l'axe d'abscisses soit situé à égale distance du point de tangence et de l'origine des coordonnées.

132. Trouver une courbe telle que la distance de toute tangente à l'origine des coordonnées soit égale à l'abscisse du point de tangence.

133. Trouver les valeurs de α et β pour lesquelles l'équation $y' = ax^{\alpha} + by^{\beta}$ se ramène à une équation homogène par substitution de $y = z^m$.

134*. Soit k_0 la racine de l'équation $f(k) = k$. Montrer que:

1) si $f'(k_0) < 1$, aucune solution de l'équation $y' = f(y/x)$ n'est tangente à la solution $y = k_0 x$ à l'origine des coordonnées;

2) si $f'(k_0) > 1$, il existe une infinité de solutions tangentes à cette solution.

135. Tracer approximativement les courbes intégrales des équations suivantes (sans les résoudre):

a) $y' = \frac{y(2y-x)}{x^2}$; b) $y' = \frac{2y^2-x^2}{xy}$;

c) $y' = \frac{2y^3-x^2y}{2x^2y-x^3}$; d*) $xy' = y + \sqrt{y^2 + \frac{y^3}{x}}$.

Indication. La tangente de l'angle entre le rayon $y = kx$ et la courbe intégrale de l'équation $y' = f(y/x)$ qui le coupe est égale à $(f(k) - k)/(1 + kf(k))$ (pourquoi?). Pour la construction approchée des courbes intégrales, il faut étudier le signe de cette fraction en fonction de k.

§ 5. Equations linéaires du premier ordre

1. L'équation

$$y' + a(x) y = b(x) \tag{1}$$

est dite linéaire. Pour la résoudre, il faut d'abord intégrer l'équation

$$y' + a(x) y = 0 \tag{2}$$

(par séparation des variables, cf. § 2), remplacer ensuite, dans la solution générale de (2) la constante arbitraire C par la fonction inconnue $C(x)$, et, enfin, porter l'expression de y obtenue dans l'équation (1) et trouver la fonction $C(x)$.

2. Certaines équations deviennent linéaires lorsqu'on permute la fonction cherchée et la variable indépendante. Par exemple, l'équation $y = (2x + y^3) y'$, où y est fonction de x, n'est pas linéaire. Ecrivons-la en différentielles: $y\,dx - (2x + y^3)\,dy = 0$. Vu que x et dx figurent linéairement dans l'équation, celle-ci est donc linéaire, si l'on prend x pour fonction cherchée et y pour variable indépendante. Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y} x = y^2$$

et se résoudre comme l'équation (1).

3. Pour résoudre l'équation de Bernoulli, c'est-à-dire l'équation

$$y' + a(x)\,y = b(x)\,y^n,$$

il faut diviser ses deux membres par y^n et substituer $1/y^{n-1} = z$. On obtient ainsi une équation linéaire qui peut être résolue par la méthode décrite plus haut (cf. [1], chapitre I, § 4, point 2, exemple 10).

4. L'équation de Riccati, c'est-à-dire l'équation

$$y' + a(x)\,y + b(x)\,y^2 = c(x),$$

ne se résout pas par quadratures. En connaissant une solution particulière $y_1(x)$, on ramène, par substitution de $y = y_1(x) + z$, l'équation de Riccati à l'équation de Bernoulli, puis on l'intègre par des quadratures.

On arrive parfois à trouver une solution particulière en partant de la forme du terme constant de l'équation (terme ne contenant pas y). Par exemple, dans l'équation $y' + y^2 = x^2 - 2x$ les termes du premier membre seront semblables à ceux du second membre si l'on pose $y = ax + b$. En portant dans l'équation et en égalant les coefficients des termes semblables, on trouve a et b (si la solution particulière du type donné existe, ce qui n'est pas toujours le cas). Un autre exemple: pour l'équation $y' + 2y^2 = 6/x^2$ les mêmes raisonnements nous suggèrent de rechercher une solution particulière sous la forme $y = a/x$. Portant $y = a/x$ dans l'équation, on trouve la constante a.

Intégrer les équations:

136. $xy' - 2y = 2x^4$.

137. $(2x + 1)\,y' = 4x + 2y$.

138. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$.

139. $(xy + e^x)\,dx - x\,dy = 0$.

140. $x^2y' + xy + 1 = 0$.

141. $y = x\,(y' - x\cos x)$.

142. $2x\,(x^2 + y)\,dx = dy$.

143. $(xy' - 1)\ln x = 2y$.

144. $xy' + (x + 1)\,y = 3x^2e^{-x}$.

145. $(x + y^2)\,dy = y\,dx$.

146. $(2e^y - x)\,y' = 1$.

147. $(\sin^2 y + x \operatorname{cotg} y)\,y' = 1$.

148. $(2x + y)\,dy = y\,dx + 4\ln y\,dy$.

149. $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$.

150. $(1 - 2xy)\,y' = y\,(y - 1)$.

151. $y' + 2y = y^2e^x$.

152. $(x + 1)(y' + y^2) = -y$.

153. $y' = y^4\cos x + y \operatorname{tg} x$.

154. $xy^2y' = x^2 + y^3$.

155. $xy\,dy = (y^2 + x)\,dx$.

156. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

157. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$.

158. $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$.

159. $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$.

160. $(2x^2y\ln y - x)\,y' = y$.

Par changement de variables ou par dérivation, intégrer les équations données en les ramenant préalablement à des équations linéaires:

161. $x\,dx = (x^2 - 2y + 1)\,dy$.

162. $(x + 1)(yy' - 1) = y^2$.

163. $x(e^y - y') = 2$.

164. $(x^2 - 1)\,y' \sin y + 2x \cos y = 2x - 2x^3$.

165. $y(x) = \int_0^x y(t)\,dt + x + 1$.

166. $\int_0^x (x - t)\,y(t)\,dt = 2x + \int_0^x y(t)\,dt$.

Après avoir choisi une solution particulière, ramener chaque équation de Riccati à l'équation de Bernoulli et intégrer:

167. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$.

168. $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$.

169. $xy' - (2x - 1)\,y + y^2 = -x^2$.

170. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.

171. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$.

172. Trouver les trajectoires orthogonales aux courbes de la famille $y^2 = Ce^x + x + 1$.

173. Trouver les courbes telles que l'aire du trapèze limité par les axes de coordonnées, la tangente et l'ordonnée du point de contact soit une constante égale à $3a^2$.

174. Trouver les courbes telles que l'aire du triangle limité par la tangente, l'axe d'abscisses et le segment joignant l'origine des coordonnées au point de contact soit une constante égale à a^2.

175. Dans un réservoir contenant 10 kg de sel en 100 litres de solution se déversent 5 litres d'eau à la minute. Le mélange qui se forme s'écoule à la même vitesse dans un autre réservoir de même capacité (100 litres) rempli initialement d'eau pure, l'excès du liquide se dégageant également de celui-ci. Quand la quantité de sel atteindra-t-elle son maximum dans le deuxième réservoir? Déterminer cette quantité de sel.

176. Pendant le temps Δt (où Δt est très petit et s'exprime en fractions d'année) chaque gramme de radium perd $0{,}00044\Delta t$ gramme et se transforme en $0{,}00043\Delta t$ gramme de radon. Un gramme de radon se désintègre pendant le même temps et perd $70\Delta t$ gramme. Au début de l'expérience il y avait une certaine

quantité x_0 de radium pur. Quand la quantité de radon formé et non encore désintégré atteindra-t-elle son maximum?

177. Soient données deux solutions différentes y_1 et y_2 d'une équation linéaire du premier ordre. Exprimer la solution générale de l'équation en fonction des solutions données.

178. Trouver la solution de l'équation

$$y' \sin 2x = 2 (y + \cos x)$$

qui reste bornée pour $x \to \pi/2)$

179*. Soit l'équation $xy' + ay = f(x)$, où $a = \text{const} > 0$, $f(x) \to b$ pour $x \to 0$. Montrer que pour $x \to 0$ il y a une solution et une seule qui reste bornée. Trouver la limite de cette solution pour $x \to 0$.

180*. Soit, dans l'équation ci-dessus, $a = \text{const} < 0$, $f(x) \to b$ pour $x \to 0$. Montrer que toutes les solutions de cette équation ont une même limite finie pour $x \to 0$. Trouver cette limite.

La solution des problèmes n°s 181 à 183 s'exprime par des intégrales infinies.

181*. Montrer que l'équation $\frac{dx}{dt} + x = f(t)$, où $|f(t)| \leqslant M$ pour $-\infty < t < +\infty$ a une solution unique bornée pour $-\infty < t < +\infty$. Trouver cette solution. Montrer que la solution obtenue est périodique si la fonction $f(t)$ l'est.

182*. Montrer qu'une solution et une seule de l'équation $xy' - (2x^2 + 1)\, y = x^2$ tend vers une limite finie pour $x \to +\infty$. Trouver cette limite. Intégrer la solution.

183*. Trouver la solution périodique de l'équation

$$y' = 2y \cos^2 x - \sin x.$$

184*. Soit l'équation $\frac{dx}{dt} + a(t)\, x = f(t)$, où $a(t) \geqslant c > 0$, $f(t) \to 0$ pour $t \to +\infty$. Démontrer que toute solution de cette équation tend vers zéro, lorsque $t \to +\infty$.

185*. Supposons que dans l'équation du problème ci-dessus $a(t) \geqslant c > 0$ et que $x_0(t)$ soit une solution vérifiant la condition initiale $x_0(0) = b$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si l'on fait varier la fonction $f(t)$ et le nombre b d'une quantité inférieure à δ (c'est-à-dire si l'on les remplace par une fonction $f_1(t)$ et un nombre b_1 tels que $|f_1(t) - f(t)| < \delta$, $|b_1 - b| < \delta$) la variation de la solution $x_0(t)$, pour $t \geqslant 0$, soit inférieure à ε. Cette propriété de la solution est dite stabilité en perturbations continues.

§ 6. Equations aux différentielles totales. Facteur intégrant

1. L'équation

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \qquad (1)$$

est dite aux différentielles totales si son premier membre est une différentielle totale d'une certaine fonction $F(x, y)$. Ceci a lieu si $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$. Pour résoudre l'équation (1) il faut trouver une fonction $F(x, y)$ telle que la différentielle totale $dF(x, y) = F'_x\, dx + F'_y\, dy$ soit égale au premier membre de l'équation (1). Alors la solution générale de (1) peut s'écrire $F(x, y) = C$, où C est une constante arbitraire.

E x e m p l e. Résoudre l'équation

$$(2x + 3x^2 y)\, dx + (x^3 - 3y^2)\, dy = 0. \qquad (2)$$

Etant donné que $\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2 y) = 3x^2$, $\frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2$, l'équation (2) est aux différentielles totales. Cherchons une fonction $F(x, y)$ dont la différentielle totale $dF = F'_x\, dx + F'_y\, dy$ soit égale au premier membre de l'équation (2), c'est-à-dire une fonction F telle que

$$F'_x = 2x + 3x^2 y, \quad F'_y = x^3 - 3y^2. \qquad (3)$$

Intégrons en x la première des équations (3), en considérant y constant; prenons pour constante d'intégration une fonction inconnue $\varphi(y)$ de y:

$$F = \int (2x + 3x^2 y)\, dx = x^2 + x^3 y + \varphi(y).$$

En portant cette expression de F dans la deuxième des équations (3), on détermine $\varphi(y)$:

$$(x^2 + x^3 y + \varphi(y))'_y = x^3 - 3y^2; \quad \varphi'(y) = -3y^2; \quad \varphi(y) = -y^3 + \text{const.}$$

Par conséquent, $F(x, y) = x^2 + x^3 y - y^3$ et l'équation (2) prendra la forme

$$x^2 + x^3 y - y^3 = C.$$

2. On appelle facteur intégrant de l'équation

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \qquad (4)$$

une fonction $m(x, y) \not\equiv 0$ telle que l'équation (4) multipliée par cette fonction se transforme en une équation aux différentielles totales. Lorsque les fonctions M et N possèdent des dérivées continues partielles et ne s'annulent pas simultanément, le facteur intégrant existe. Cependant, il n'y a pas de méthode générale

pour le déterminer (lorsque la solution générale de l'équation (4) est inconnue).

Dans certains cas, le facteur intégrant se détermine par les méthodes indiquées dans [1], chapitre II, § 3, point 3 ou dans [4], chapitre I, § 5. Dans certaines équations, il est possible de mettre en évidence les différentielles totales en appliquant des formules connues:

$$d(xy) = y\,dx + x\,dy, \quad d(y^2) = 2y\,dy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}, \quad d(\ln y) = \frac{dy}{y}, \text{ etc.}$$

E x e m p l e. Intégrer l'équation

$$y\,dx - (4x^2y + x)\,dy = 0. \tag{5}$$

Groupons les termes qui représentent une différentielle totale. Puisque $y\,dx - x\,dy = -x^2 d(y/x)$, alors en divisant l'équation (5) par $-x^2$, on obtient

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + 4y\,dy = 0, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) + d(2y^2) = 0,$$

qui est une équation aux différentielles totales. En intégrant directement (il n'est pas nécessaire de passer à la forme (1)), on trouve la solution:

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = C.$$

Notons qu'en divisant par $-x^2$ on a perdu la solution $x = 0$.

R e m a r q u e. La division de l'équation (5) par $-x^2$, ou, ce qui revient au même, la multiplication par $-1/x^2$, ayant donné une équation aux différentielles totales, le facteur intégrant de l'équation (5) est égal à $-1/x^2$.

3. Si dans l'équation (4) l'on reconnaît la différentielle totale d'une certaine fonction $\varphi(x, y)$, alors l'équation est parfois simplifiée lorsqu'on passe des variables (x, y) aux variables (x, z) ou (y, z), où $z = \varphi(x, y)$.

E x e m p l e s. 1) Résoudre l'équation $y\,dx - (x^3y + x)\,dy = 0$.

En mettant en évidence la différentielle totale, comme dans l'exemple précédent, on obtient:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + xy\,dy = 0.$$

En passant aux variables $z = y/x$ et y, on a l'équation

$$dz + \frac{y^2}{z}\,dy = 0$$

qui se résout aisément.

2) Résoudre l'équation $(xy + y^4)\,dx + (x^2 - xy^3)\,dy = 0$.

Groupons les termes de façon à mettre en évidence les différentielles totales:

$$x(y\,dx + x\,dy) + y^3(y\,dx - x\,dy) = 0, \quad xd(xy) + y^5 d\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

En divisant par x et en substituant $xy = u$, $x/y = v$, on aboutit à une équation $du + \frac{u^2}{v^3}dv = 0$ aisément résoluble.

Vérifier que les équations données sont aux différentielles totales et les résoudre:

186. $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$.
187. $(2 - 9xy^2)\,x\,dx + (4y^2 - 6x^3)\,y\,dy = 0$.
188. $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$.
189. $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0$.
190. $\frac{3x^2 + y^2}{y^2}\,dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}\,dy = 0$.
191. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})\,dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$.
192. $(1 + y^2 \sin 2x)\,dx - 2y \cos^2 x\,dy = 0$.
193. $3x^2(1 + \ln y)\,dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy$.
194. $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}\,dy = 0$.

Résoudre les équations données en déterminant d'une façon ou d'une autre le facteur intégrant ou en procédant à un changement de variables:

195. $(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0$.
196. $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$.
197. $y\,dy = (x\,dy + y\,dx)\sqrt{1 + y^2}$.
198. $xy^2(xy' + y) = 1$.
199. $y^2\,dx - (xy + x^3)\,dy = 0$.
200. $\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + \frac{dy}{y} = 0$.
201. $(x^2 + 3\ln y)\,y\,dx = x\,dy$.
202. $y^2\,dx + (xy + \operatorname{tg} xy)\,dy = 0$.
203. $y(x + y)\,dx + (xy + 1)\,dy = 0$.
204. $y(y^2 + 1)\,dx + x(y^2 - x + 1)\,dy = 0$.
205. $(x^2 + 2x + y)\,dx = (x - 3x^2y)\,dy$.
206. $y\,dx - x\,dy = 2x^3 \operatorname{tg}\frac{y}{x}\,dx$

207. $y^2\,dx + (e^x - y)\,dy = 0$.
208. $xy\,dx = (y^3 + x^2y + x^2)\,dy$.
209. $x^2y\,(y\,dx + x\,dy) = 2y\,dx + x\,dy$.
210. $(x^2 - y^2 + y)\,dx + x\,(2y - 1)\,dy = 0$.
211. $(2x^2y^2 + y)\,dx + (x^3y - x)\,dy = 0$.
212. $(2x^2y^3 - 1)\,y\,dx + (4x^2y^3 - 1)\,x\,dy = 0$.
213. $y\,(x + y^2)\,dx + x^2\,(y - 1)\,dy = 0$.
214. $(x^2 - \sin^2 y)\,dx + x \sin 2y\,dy = 0$.
215. $x\,(\ln y + 2 \ln x - 1)\,dy = 2y\,dx$.
216. $(x^2 + 1)\,(2x\,dx + \cos y\,dy) = 2x \sin y\,dx$.
217. $(2x^3y^2 - y)\,dx + (2x^2y^3 - x)\,dy = 0$.
218. $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)\,y' = 0$.
219. $(x^2 - y)\,dx + x\,(y + 1)\,dy = 0$.
220. $y^2\,(y\,dx - 2x\,dy) = x^3\,(x\,dy - 2y\,dx)$.

§ 7. Existence et unicité d'une solution

1. Théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

*Soient dans un domaine fermé R ($|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$) des fonctions f et f'_y continues *). Alors l'équation* (1) *admet sur l'intervalle $x_0 - d \leqslant x \leqslant x_0 + d$ une solution unique vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.*

Il en résulte qu'on peut prendre $d = \min\left\{a; \frac{b}{m}\right\}$, où a et b sont indiqués plus haut, m étant tel que $|f| \leqslant m$ dans R.

Les approximations successives déterminées par les formules

$$y(x_0) = y_0, \quad y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{k-1}(s))\,ds$$

convergent uniformément vers la solution sur l'intervalle donné.

Remarque. Pour qu'une solution existe, il suffit simplement que $f(x, y)$ soit continue dans le domaine R; cependant, la solution peut ne pas être unique.

---

*) Au lieu de la continuité de f'_y on peut demander qu'elle soit bornée ou imposer la condition de Lipschitz $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant k\,|y_1 - y_2|$, $k = \text{const}$.

2. Le système d'équations

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{2}$$

en notations vectorielles s'écrit comme suit:

$$y' = f(x, y), \tag{3}$$

où $y = (y_1, \ldots, y_n)$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ sont des vecteurs. La continuité du vecteur fonction f implique celle de toutes les fonctions $f_1, \ldots, f_n$, et au lieu de $\frac{\partial f}{\partial y}$ on considère la matrice de dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$, $i, k = 1, \ldots, n$.

Le théorème d'existence et d'unicité d'une solution et tous les raisonnements du point 1 restent valables pour un système d'équations donné sous la forme (3). $|y|$ désigne donc la longueur du vecteur y: $|y| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$.

3. Théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une équation d'ordre n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{4}$$

Si dans un domaine D une fonction f et ses dérivées partielles du premier ordre par rapport à $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ sont continues et que le point $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ appartienne à D, alors l'équation (4) *admet une solution unique vérifiant les conditions initiales*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

On peut ramener l'équation (4) à un système de la forme (2) par introduction de nouvelles fonctions inconnues d'après les formules $y = y_1$, $y' = y_2$, $y'' = y_3, \ldots, y^{(n-1)} = y_n$. L'équation (4) se ramène de cette façon au système

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \ldots, y_{n-1}' = y_n, \quad y_n' = f(x, y_2, \ldots, y_n)$$

qui est un cas particulier du système (2) et auquel s'appliquent tous les raisonnements du point 2.

4. Prolongement des solutions. Dans bien des cas, la solution de l'équation (1) ou du système (2) existe aussi bien sur le segment indiqué au point 1 que sur un autre, plus grand.

Si l'équation (1) ou le système (2) satisfait aux conditions du théorème d'existence dans un domaine fermé limité, alors toute solution peut être prolongée jusqu'à la frontière de ce domaine.

Si dans le domaine $\alpha < x < \beta$, $|y| < \infty$ (α et β pouvant être finis ou infinis) le deuxième membre de l'équation (1) ou du système (3) est continu et vérifie l'inégalité

$$|f(x\ y)| \leqslant a(x)\,|y| + b(x),$$

et si les fonctions $a(x)$ et $b(x)$ le sont également, alors toute solution peut donc être prolongée dans tout l'intervalle $\alpha < x < \beta$.

221. Construire les approximations successives y_0, y_1, y_2 des solutions des équations ci-dessous avec les conditions initiales données:

a) $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$.
b) $y' = y^2 + 3x^2 - 1$, $y(1) = 1$.
c) $y' = y + e^{y-1}$, $y(0) = 1$.
d) $y' = 1 + x \sin y$, $y(\pi) = 2\pi$.

222. Construire deux approximations successives pour chacune des solutions des équations et systèmes suivants:

a) $y' = 2x + z$, $z' = y$; $y(1) = 1$, $z(1) = 0$.
b) $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = x^2$; $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.
c) $y'' + y'^2 - 2y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
d) $\frac{d^2x}{dt^2} = 3tx$; $x(1) = 2$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1} = -1$.

223. Définir un segment quelconque sur lequel existe une solution vérifiant les conditions initiales données:

a) $y' = x + y^3$, $y(0) = 0$.
b) $y' = 2y^2 - x$, $y(1) = 1$.
c) $\frac{dx}{dt} = t + e^x$, $x(1) = 0$.
d) $\frac{dx}{dt} = y^2$, $\frac{dy}{dt} = x^2$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

224*. Soit l'équation $y' = x - y^2$ avec la condition initiale $y(0) = 0$. Déterminer la troisième approximation de la solution et évaluer son erreur pour $0 \leqslant x \leqslant 0,5$.

Indication. On évaluera le reste de la série dont la converdence est démontrée dans le théorème d'existence d'une solution, voir [1], chapitre II, § 1 ; [2], § 15.

225. En utilisant une condition suffisante quelconque d'unicité, déterminer sur le plan x, y les domaines dans lesquels par chaque point passe une seule solution de l'équation:

a) $y' = 2xy + y^2$, b) $y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$,
c) $(x - 2)\, y' = \sqrt{y} - x$, d) $y' = 1 + \operatorname{tg} y$,
e) $(y - x)\, y' = y \ln x$, f) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

226. Pour quelles valeurs non négatives de a et en quels points l'équation $y' = |y|^a$ n'admet pas de solution unique?

227. Etudier les équations données ci-dessous à l'aide de la condition nécessaire et suffisante d'unicité de la solution des équations du type $y' = f(y)$ (cf. [1], chapitre III, § 4, point 1, en petits caractères, ou [2], § 4). Déterminer les domaines où $f(y)$ conserve son signe, construire approximativement les solutions. Pour les solutions e) et f) les deuxièmes membres, pour $y = 0$, sont définis par continuité:

a) $y' = \sqrt[3]{y^2}$, b) $y' = y\sqrt[3]{y+1}$,

c) $y' = (y-1)\sqrt{y^3}$, d) $y' = \arccos y$,

e) $y' = y \ln y$, f) $y' = y \ln^2 y$.

228. Pour quelles conditions initiales les équations et systèmes suivants admettent-ils une solution unique:

a) $y'' = \operatorname{tg} y + \sqrt[3]{x}$, b) $(x+1)\, y'' = y + \sqrt{y}$,

c) $(x-y)\, y'y''' = \ln xy$, d) $y'' - yy''' = \sqrt[5]{y' - x}$,

e) $\dfrac{dx}{dt} = y^2 + \sqrt[3]{t}$, $\dfrac{dy}{dt} = \sqrt[3]{x}$,

f) $\dfrac{dx}{dt} = y^3 + \ln(t+1)$, $x\dfrac{dy}{dt} = \sqrt[3]{y-t}$.

229. Etablir pour chacune des équations suivantes si les graphiques de deux solutions peuvent se couper en un point (x_0, y_0) du plan x, y:

a) $y' = x + y^2$; b) $y'' = x + y^2$.

230. Déterminer si les graphiques de deux solutions des équations suivantes peuvent être tangents l'un à l'autre en un point (x_0, y_0) du plan x, y:

a) $y' = x + y^2$; b) $y'' = x + y^2$; c) $y''' = x + y^2$.

231. Combien existe-t-il de solutions de l'équation $y^{(n)} = x + y^2$ satisfaisant simultanément à deux conditions: $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$? On étudiera séparément les cas $n = 1, 2, 3$.

232. Combien existe-t-il de solutions de l'équation $y^{(n)} = f(x, y)$ (f et f'_y sont continues dans tout le plan x, y) passant par le point (x_0, y_0) dans la direction faisant avec l'axe Ox l'angle α? Considérer les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n \geqslant 3$.

233. Pour quelles valeurs de n l'équation $y^{(n)} = f(x, y)$ (f et f'_y sont continues) comprendra-t-elle parmi ses solutions les deux fonctions: $y_1 = x$, $y_2 = x + x^4$?

234. Pour quelles valeurs de n l'équation $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, où f est une fonction continûment dérivable, admettra-t-elle parmi ses solutions les deux fonctions: $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$?

235*. Soit $f(x, y)$ une fonction continue en x, y et non croissante pour tout x, lorsque y croît. Démontrer que si deux solutions de l'équation $y' = f(x, y)$ satisfont à une même condition initiale $y(x_0) = y_0$, elles coïncident pour $x \geqslant x_0$.

236. Combien de dérivées possèdent les solutions des équations et systèmes ci-dessous au voisinage de l'origine des coordonnées? (Pour le théorème de différentiabilité des solutions cf. [2], § 19 ou [4], § 6, théorème 1.4):

a) $y' = x + y^{7/3}$, b) $y' = x|x| - y^2$,

c) $y'' = |x^3| + y^{5/3}$,

d) $y''' = y - x\sqrt[3]{x}$,

e) $\frac{dx}{dt} = t + y$, $\frac{dy}{dt} = x + t^2|t|$,

f) $\frac{dx}{dt} = y^2 + \sqrt[3]{t^4}$, $\frac{dy}{dt} = \sqrt[3]{x}$.

237*. Pour quelles valeurs de a chaque solution est prolongeable dans l'intervalle infini $-\infty < x < +\infty$:

a) $y' = |y|^a$? b) $y' = (y^2 + e^x)^a$?

c) $y' = |y|^{a-1} + x(\sqrt[3]{y})^{2a}$?

d) $y' = (y^2 + z^2 + 2)^{-a}$, $z' = y(1 + z^2)^a$?

238*. Montrer que les équations suivantes admettent une solution vérifiant une condition initiale arbitraire $y(x_0) = y_0$ pour $x_0 \leqslant x < +\infty$:

a) $y' = x^3 - y^3$, b) $y' = xy + e^{-y}$.

239*. Soient $f(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ des fonctions continues dans tout le plan x, y; $f'_y(x, y) \leqslant k(x)$, où $k(x)$ est continue. Montrer que l'équation $y' = f(x, y)$ admet une solution vérifiant une condition initiale arbitraire $y(x_0) = y_0$, pour $x_0 \leqslant x < +\infty$.

240*. Soit donné, en écriture vectorielle, un système $y' = f(x, y)$ vérifiant les conditions du théorème d'existence d'une solution au voisinage de chaque point (x, y). Soit encore dans un domaine $|y| > b$, pour tous les x,

$$y \cdot f(x, y) \leqslant k(x) |y|^2,$$

où $y \cdot f$ est le produit scalaire, la fonction $k(x)$ étant continue. Démontrer l'existence, pour $x_0 \leqslant x < +\infty$, d'une solution vérifiant une condition initiale arbitraire $y(x_0) = y_0$.

§ 8. Equations non résolues par rapport à la dérivée

1. Les équations de la forme $F(x, y, y') = 0$ peuvent se résoudre par les méthodes suivantes.

a) On résout l'équation par rapport à y', c'est-à-dire on se sert de l'équation $F(x, y, y') = 0$ pour exprimer y' en fonction de x et y; on obtient une ou plusieurs équations de la forme $y' = f(x, y)$ qu'il faut intégrer.

b) Méthode du paramètre *).

Soit une équation $F(x, y, y') = 0$ résoluble par rapport à y, c'est-à-dire pouvant s'écrire sous la forme $y = f(x, y')$. L'introduction du paramètre

$$p = \frac{dy}{dx} = y' \tag{1}$$

donne

$$y = f(x, p). \tag{2}$$

En prenant la différentielle totale des deux membres de l'égalité (2) et en remplaçant dy par $p\,dx$ (en vertu de (1)), on obtient une équation de la forme:

$$M(x, p)\,dx + N(x, p)\,dp = 0.$$

Si la solution de cette équation est définie sous la forme $x = \varphi(p)$, alors, en utilisant l'égalité (2), on trouve la solution de l'équation initiale en écriture paramétrique: $x = \varphi(p)$, $y = f(\varphi(p), p)$.

Les équations de la forme $x\,f(y, y')$ s'intègrent par la même méthode.

E x e m p l e. Intégrer l'équation $y = x + y' - \ln y'$. Introduisons le paramètre $p = y'$:

$$y = x + p - \ln p. \tag{3}$$

En prenant la différentielle totale des deux membres de l'égalité et en remplaçant dy par $p\,dx$ en vertu de (1), on obtient $dy = dx + dp - \frac{dp}{p}$, $p\,dx = dx + dp - \frac{dp}{p}$. Intégrons l'équation obtenue. Portons les termes en dx à gauche et ceux en dp à droite; il vient:

$$(p-1)\,dx = \frac{p-1}{p}\,dp. \tag{4}$$

a) Si $p \neq 1$, alors, en réduisant par $p - 1$, on obtient

$$dx = \frac{dp}{p}, \quad x = \ln p + C.$$

En portant ceci dans (3), on obtient la solution en écriture paramétrique

$$x = \ln p + C, \quad y = p + C. \tag{5}$$

Dans le cas présent, il est possible d'éliminer le paramètre p et de trouver la solution sous sa forme explicite. Il faut alors, à partir de la première équation, exprimer p en fonction de x,

*) Nous énonçons ici la forme la plus simple de cette méthode. Pour a forme plus générale, cf. [1], chapitre III, § 3, point 1.

c'est-à-dire $p = e^{x-C}$. En portant ceci dans la deuxième équation, on trouve la solution cherchée

$$y = e^{x-C} + C. \tag{6}$$

b) Considérons le cas où l'on a $p = 1$ dans (4). En portant $p = 1$ dans (3), on obtient encore une solution

$$y = x + 1. \tag{7}$$

(On commettrait une erreur si l'on remplaçait, dans l'égalité $p = 1$, p par y', ce qui donne par intégration $y = x + C$.)

2. Une solution $y = \varphi(x)$ de l'équation $F(x, y, y') = 0$ est dite *singulière*, si par chacun de ses points passe une autre solution admettant en ce point la même tangente, mais ne coïncidant pas avec elle dans un voisinage aussi petit que l'on veut de ce point *).

Si la fonction $F(x, y, y')$ et les dérivées $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial y'}$ sont continues, toute solution singulière de l'équation

$$F(x, y, y') = 0 \tag{8}$$

vérifie l'équation

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \tag{9}$$

C'est pourquoi, pour définir les solutions singulières de l'équation (3), il faut éliminer y' entre les équations (8) et (9). L'équation obtenue $\psi(x, y) = 0$ est appelée *équation de la courbe discriminante*. Il convient de vérifier si chaque branche de cette courbe discriminante est solution de l'équation (8), auquel cas vérifier si elle est singulière, c'est-à-dire si d'autres solutions lui sont tangentes en tout point.

E x e m p l e. Trouver une solution singulière de l'équation

$$y = x + y' - \ln y'. \tag{10}$$

En différentiant les deux membres de (10) par rapport à y', on a

$$0 = 1 - \frac{1}{y'}. \tag{11}$$

Eliminons y' entre les équations (10) et (11). De (11) on a $y' = 1$; en le portant dans (10), on obtient l'équation de la courbe discriminante

$$y = x + 1. \tag{12}$$

Voyons si cette courbe est solution singulière. Vérifions d'abord si elle est solution de l'équation (10). En portant (12) dans (10), on obtient l'identité $x + 1 = x + 1$. Donc, la courbe (12) est solution.

---

*) Cette définition a été empruntée à (1), mais il en existe d'autres qui ne lui sont pas équivalentes.

Vérifions maintenant si cette solution est singulière, c'est-à-dire si d'autres solutions lui sont tangentes en chaque point. On a défini (point 1) que les autres solutions s'expriment par la formule (6). Ecrivons les conditions de tangence des courbes $y = y_1(x)$ et $y = y_2(x)$ en un point d'abscisse x_0:

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \quad y_1'(x_0) = y_2'(x_0). \tag{13}$$

Pour les solutions (6) et (12) ces conditions s'écrivent $e^{x_0 - C} + C = x_0 + 1$, $e^{x_0 - C} = 1$. De la deuxième équation on déduit $C = x_0$; en le portant dans la première équation, on trouve $1 + x_0 = x_0 + 1$. Cette égalité est valable pour tous les x_0. Il en résulte que pour tout x_0 la solution (12) est tangente à une courbe de la famille (6), notamment à la courbe telle que $C = x_0$.

Ainsi, la solution (12) est tangente en chaque point à une autre solution (6) sans coïncider avec elle. La solution (12) est donc singulière.

Si la famille de solutions est écrite sous forme paramétrique, comme dans (5), les conditions de tangence se vérifient de façon analogue. De plus, il faut tenir compte de $y' = p$.

3. Si la famille de courbes $\Phi(x, y, C) = 0$, solutions de l'équation $F(x, y, y') = 0$, possède une enveloppe $y = \varphi(x)$, alors celle-ci est une solution singulière de la même équation. Si la fonction Φ possède des dérivées premières continues, alors pour déterminer l'enveloppe il convient d'éliminer C entre les équations

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

et de vérifier si la courbe obtenue est une enveloppe, c'est-à-dire si les courbes de la famille lui sont tangentes en tout point. Cette vérification peut se faire par la méthode proposée à la fin du point 2 en utilisant les conditions de tangence (13).

Intégrer les équations données ; trouver les solutions singulières (si elles existent) ; construire les graphiques :

241. $y'^2 - y^2 = 0$.
242. $8y'^3 = 27y$.
243. $(y' + 1)^3 = 27(x + y)^2$.
244. $y^2(y'^2 + 1) = 1$.
245. $y'^2 - 4y^3 = 0$.
246. $y'^2 = 4y^3(1 - y)$.
247. $xy'^2 = y$.
248. $yy'^3 + x = 1$.
249. $y'^3 + y^2 = yy'(y' + 1)$.
250. $4(1 - y) = (3y - 2)^2 y'^2$.

Résoudre les équations par rapport à y' et déterminer les solutions générales par des méthodes ordinaires. Trouver également les solutions singulières, s'il y en a :

251. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$.
252. $xy'(xy' + y) = 2y^2$.
253. $xy'^2 - 2yy' + x = 0$.
254. $xy'^2 = y(2y' - 1)$.

255. $y'^2 + x = 2y$. 256. $y'^3 + (x + 2) e^y = 0$.
257. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$. 258. $(xy' + 3y)^2 = 7x$.
259. $y'^2 - 2yy' = y^2 (e^x - 1)$.
260. $y' (2y - y') = y^2 \sin^2 x$.
261. $y'^4 + y^2 = y^4$. 262. $x (y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy'$.
263. $y (xy' - y)^2 = y - 2xy'$.
264. $yy' (yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$.
265. $y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2$.
266. $y (y - 2xy')^2 = 2y'$.

Intégrer les équations par la méthode du paramètre:
267. $x - y'^3 + y'$. 268. $x (y'^2 - 1) = 2y'$.
269. $x = y' \sqrt{y'^2 + 1}$. 270. $y' (x - \ln y') = 1$.
271. $y = y'^2 + 2y'^3$. 272. $y = \ln (1 + y'^2)$.
273. $(y' + 1)^3 = (y' - y)^2$. 274. $y = (y' - 1) e^{y'}$.
275. $y'^4 - y'^2 = y^2$. 276. $y'^2 - y'^3 = y^2$.
277. $y'^4 = 2yy' + y^2$. 278. $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$.
279. $5y + y'^2 = x (x + y')$. 280. $x^2y'^2 = xyy' + 1$.
281. $y'^3 + y^2 = xyy'$. 282. $2xy' - y = y' \ln yy'$.
283. $y' = e^{xy'/y}$. 284. $y = xy' - x^2y'^3$.
285. $y = 2xy' + y^2y'^3$. 286. $y (y - 2xy')^3 = y'^2$.

Intégrer les équations de Lagrange et de Clairaut:
287. $y = xy' - y'^2$. 288. $y + xy' = 4 \sqrt{y'}$.
289. $y = 2xy' - 4y'^3$. 290. $y = xy' - (2 + y')$.
291. $y'^3 = 3 (xy' - y)$. 292. $y = xy'^2 - 2y'^3$.
293. $xy' - y = \ln y'$. 294. $xy' (y' + 2) = y$.
295. $2y'^2 (y - xy') = 1$. 296. $2xy' - y = \ln y'$.

297. Trouver pour chacune des équations différentielles la solution particulière si la famille de ses solutions est connue:
a) $y = Cx^2 - C^2$, b) $Cy = (x - C)^2$,
c) $y = C (x - C)^2$, d) $xy = Cy - C^2$.

298. Trouver une courbe dont chaque tangente forme avec les axes de coordonnées un triangle d'aire $2a^2$.

299. Trouver une courbe dont chaque tangente découpe sur les axes de coordonnées des segments tels que la somme des inverses des carrés de leurs longueurs soit égale à 1.

300. Trouver une courbe passant par l'origine des coordonnées et telle que le segment de la normale coupé par les côtés du premier quadrant ait une longueur constante égale à 2.

§ 9. Diverses équations du premier ordre *)

Intégrer les équations et construire les graphiques de leurs solutions:

301. $xy' + x^2 + xy - y = 0.$
302. $2xy' + y^2 = 1.$
303. $(2xy^2 - y)\,dx + x\,dy = 0.$
304. $(xy' + y)^2 = x^2y'.$
305. $y - y' = y^2 + xy'.$
306. $(x + 2y^3)\,y' = y.$
307. $y'^3 - y'e^{2x} = 0.$
308. $x^2y' = y\,(x + y).$
309. $(1 - x^2)\,dy + xy\,dx = 0.$
310. $y'^2 + 2\,(x - 1)\,y' - 2y = 0.$
311. $y + y' \ln^2 y = (x + 2 \ln y)\,y'.$
312. $x^2y' - 2xy = 3y.$
313. $x + yy' = y^2\,(1 + y'^2).$
314. $y\,(xy' + 2y)^2.$
315. $y' = \frac{1}{x - y^2}.$
316. $y'^3 + (3x - 6)\,y' = 3y.$
317. $x - \frac{y}{y'} = \frac{2}{y}.$
318. $2y'^3 - 3y'^2 + x = y.$
319. $(x + y)^2\,y' = 1.$
320. $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0.$
321. $\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - 2x\right) dy.$
322. $xy' = e^y + 2y'.$
323. $2\,(x - y^2)\,dy = y\,dx.$
324. $x^2y'^2 + y^2 = 2x\,(2 - yy').$
325. $dy + (xy - xy^3)\,dx = 0.$
326. $2x^2y' = y^2\,(2xy' - y).$
327. $\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2.$
328. $x\,(x - 1)\,y' + 2xy = 1.$
329. $xy\,(xy' - y)^2 + 2y' = 0.$
330. $(1 - x^2)\,y' - 2xy^2 = xy$

Intégrer les équations:

331. $y' + y = xy^3.$
332. $(xy^4 - x)\,dx + (y + xy)\,dy = 0.$
333. $(\sin x + y)\,dy + (y \cos x - x^2)\,dx = 0.$
334. $3y'^3 - xy' + 1 = 0.$
335. $yy' + y^2 \operatorname{cotg} x = \cos x.$
336. $(e^y + 2xy)\,dx + (e^y + x)\,x\,dy = 0.$
337. $xy'^2 = y - y'.$
338. $x\,(x + 1)\,(y' - 1) = y.$
339. $y\,(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}.$
340. $xy' + y = \ln y'.$
341. $x^2\,(dy - dx) = (x + y)\,y\,dx.$
342. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y.$
343. $(x \cos y + \sin 2y)\,y' = 1.$
344. $y'^2 - yy' + e^x = 0.$
345. $y' = \frac{x}{y}\,e^{2x} + y.$

*) Tous les problèmes du § 9 se résolvent par les méthodes précitées.

346. $(xy' - y)^3 = y'^3 - 1$. 347. $(4xy - 3)\,y' + y^2 = 1$.

348. $y'\sqrt{x} = \sqrt{y - x} + \sqrt{x}$. 349. $xy' = 2\sqrt{y}\cos x - 2y$.

350. $3y'^4 = y' + y$. 351. $y^2 (y - xy') = x^3 y'$.

352. $y' = (4x + y - 3)^2$.

353. $(\cos x - x \sin x)\, y\, dx + (x \cos x - 2y)\, dy = 0$.

354. $x^2 y'^2 - 2xyy' = x^2 + 3y^2$.

355. $\frac{xy'}{y} + 2xy \ln x + 1 = 0$. 356. $xy' = x\sqrt{y - x^2} + 2y$.

357. $(1 - x^2 y)\, dx + x^2 (y - x)\, dy = 0$.

358. $(2xe^y + y^4)\, y' = ye^y$. 359. $xy' (\ln y - \ln x) = y$.

360. $2y' = x + \ln y'$.

361. $(2x^2 y - 3y^2)\, y' = 6x^2 - 2xy^2 + 1$.

362. $yy' = 4x + 3y - 2$.

363. $y^2 y' + x^2 \sin^3 x = y^3 \operatorname{cotg} x$.

364. $2xy' - y = \sin y'$.

365. $(x^2 y^2 + 1)\, y + (xy - 1)^2\, xy' = 0$.

366. $y \sin x + y' \cos x = 1$.

367. $x\, dy - y\, dx = x\sqrt{x^2 + y^2}\, dx$.

368. $y^2 + x^2 y'^5 = xy\,(y'^2 + y'^3)$.

369. $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$.

370. $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x}\, dy = 0$.

371. $2\left(x^2 y + \sqrt{1 + x^4 y^2}\right) dx + x^3\, dy = 0$.

372. $(y' - x\sqrt{y})\,(x^2 - 1) = xy$.

373. $y'^3 + (y'^2 - 2y')\, x = 3y' - y$.

374. $(2x + 3y - 1)\, dx + (4x + 6y - 5)\, dy = 0$.

375. $(2xy^2 - y)\, dx + (y^2 + x + y)\, dy = 0$.

376. $y = y'\sqrt{1 + y'^2}$. 377. $y^2 = (xyy' + 1) \ln x$.

378. $4y = x^2 + y'^2$.

379. $2x\, dy + y\, dx + xy^2 (x\, dy + y\, dx) = 0$.

380. $x\, dx + (x^2 \operatorname{cotg} y - 3 \cos y)\, dy = 0$.

381. $x^2 y'^2 - 2(xy - 2)\, y' + y^2 = 0$.

382. $xy' + 1 = e^{x-y}$. 383. $y' = \operatorname{tg}(y - 2x)$.

384. $3x^2 - y = y'\sqrt{x^2 + 1}$.

385. $yy' + xy = x^3$. 386. $x(x - 1)\, y' + y^3 = xy$.

387. $xy' = 2y + \sqrt{1 + y'^2}$.

388. $(2x + y + 5)\, y' = 3x + 6$.

389. $y' + \operatorname{tg} y = x \sec y$.

390. $y'^4 = 4y\,(xy' - 2y)^2$.

391. $y' = \frac{y^2 - x}{2y\,(x+1)}$.

392. $xy' = x^2 e^{-y} + 2$.

393. $y' = 3x + \sqrt{y - x^2}$.

394. $x\, dy - 2y\, dx + xy^2\,(2x\, dy + y\, dx) = 0$.

395. $(x^3 - 2xy^2)\, dx + 3x^2 y\, dy = x\, dy - y\, dx$.

396. $(yy')^3 = 27x\,(y^2 - 2x^2)$.

397. $y' - 8x\sqrt{y} = \frac{4xy}{x^2 - 1}$.

398. $[2x - \ln(y+1)]\, dx - \frac{x+y}{y+1}\, dy = 0$.

399. $xy' = (x^2 + \operatorname{tg} y)\cos^2 y$.

400. $x^2\,(y - xy') = yy'^2$.

401. $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$.

402. $y' = \frac{(1+y)^2}{x\,(y+1) - x^2}$.

403. $(y - 2xy')^2 = 4yy'^3$.

404. $6x^5 y\, dx + (y^4 \ln y - 3x^6)\, dy = 0$.

405. $y' = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$.

406. $2xy' + 1 = y + \frac{x^2}{y-1}$.

407. $yy' + x = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)^2$.

408. $y' = \left(\frac{3x + y^3 - 1}{y}\right)^2$.

409. $(x\sqrt{y^2 + 1} + 1)\,(y^2 + 1)\, dx = xy\, dy$.

410. $(x^2 + y^2 + 1)\, yy' + (x^2 + y^2 - 1)\, x = 0$.

411. $y^2\,(x - 1)\, dx = x\,(xy + x - 2y)\, dy$.

412. $(xy' - y)^2 = x^2 y^2 - x^4$.

413. $xyy' - x^2\sqrt{y^2 + 1} = (x + 1)\,(y^2 + 1)$.

414. $(x^2 - 1)\, y' + y^2 - 2xy + 1 = 0$.

415. $y' \operatorname{tg} y + 4x^3 \cos y = 2x$.

416. $(xy' - y)^2 = y'^2 - \frac{2yy'}{x} + 1$.

417. $(x + y)\,(1 - xy)\, dx + (x + 2y)\, dy = 0$.

418. $(3xy + x + y)\, y\, dx + (4xy + x + 2y)\, x\, dy = 0$.

419. $(x^2 - 1)\, dx + (x^2 y^2 + x^3 + x)\, dy = 0$.

420. $x(y'^2 + e^{2y}) = -2y'$.

§ 10. Cas d'abaissement de l'ordre

1. Si la fonction cherchée y n'entre pas dans l'équation, c'est-à-dire que celle-ci est de la forme $F\,(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, alors on peut abaisser son ordre en prenant pour fonction inconnue

la dérivée de plus petit ordre, c'est-à-dire par substitution de $y^{(k)'} = z$.

2. Si la variable indépendante x ne figure pas dans l'équation, c'est-à-dire que celle-ci est de la forme $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, alors on abaisse l'ordre de l'équation en prenant y pour variable indépendante et $y' = p(y)$ pour fonction inconnue.

Exemple. Résoudre l'équation $2yy'' = y'^2 + 1$.

L'équation ne contient pas x. Admettons $y' = p(y)$. Alors

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'p.$$

En portant $y' = p$ et $y'' = pp'$ dans l'équation, on obtient $2ypp' = p^2 + 1$. L'ordre de l'équation est donc abaissé. En résolvant l'équation obtenue, on trouve $p = \pm \sqrt{Cy - 1}$ et, par conséquent, $y' = \pm \sqrt{Cy - 1}$, d'où l'on a $4(Cy - 1) = C^2 (x + C_2)$.

3. Si l'équation est homogène en y et ses dérivées, c'est-à-dire qu'elle ne change pas quand on substitue simultanément $ky, ky', ky'', \ldots$ à $y, y', y'', \ldots$, alors on abaisse l'ordre de l'équation par la substitution $y' = yz$, où z est une fonction inconnue.

4. L'ordre de l'équation est abaissé lorsqu'elle est homogène par rapport à x et y au sens général, c'est-à-dire qu'elle ne change pas si l'on remplace x par kx et y par $k^m y$ (y' étant remplacé par $k^{m-1}y'$ et y'' par $k^{m-2}y''$, etc.). Pour savoir si l'équation est homogène et pour trouver le nombre m, il faut égaler entre eux les exposants de k dans chaque terme de l'équation après la substitution indiquée ci-dessus. Par exemple, dans l'équation $2x^4y'' - 3y^2 = x^4$, le nombre k figure avec l'exposant $4 + (m - 2)$ dans le premier terme, avec l'exposant $2m$ dans le second et avec l'exposant 4 dans le troisième. Par conséquent, m doit satisfaire aux équations

$$4 + (m - 2) = 2m = 4.$$

D'où $m = 2$. Dans le cas où les équations obtenues pour m sont incompatibles, l'équation différentielle n'est pas homogène au sens indiqué.

Le nombre m une fois trouvé, il convient de procéder au changement de variables $x = e^t$, $y = ze^{mt}$, où $z = z(t)$ est une fonction inconnue et t une variable indépendante. Il en résulte une équation ne contenant pas la variable indépendante t. L'ordre d'une telle équation peut être abaissé par l'une des méthodes considérées précédemment.

5. On abaisse aisément l'ordre d'une équation, si l'on parvient à ramener l'équation à une forme telle que ses deux membres soient des dérivées totales par rapport à x de fonctions quelconques. Par exemple, soit donnée l'équation $yy'' = y'^2$. En divisant ses

deux membres par yy', on a $\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$; $(\ln y')' = (\ln y)'$; $\ln y' =$ $= \ln y + \ln C$; $y' = yC$. L'ordre de l'équation est donc abaissé.

Intégrer les équations :

421. $x^2y'' = y'^2$.
422. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.
423. $y^3y'' = 1$.
424. $y'^2 + 2yy'' = 0$.
425. $y'' = 2yy'$.
426. $yy'' + 1 = y'^2$.
427. $y''(e^x + 1) + y' = 0$.
428. $y''' = y''^2$.
429. $yy'' = y'^2 - y'^3$.
430. $y''' = 2(y'' - 1) \operatorname{cotg} x$.
431. $2yy'' = y^2 + y'^2$.
432. $y''^3 + xy'' = 2y'$.
433. $y''^2 + y' = xy''$.
434. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.
435. $xy''' = y'' - xy''$.
436. $y''^2 = y'^2 + 1$.
437. $y'' = e^y$.
438. $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$.
439. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$.
440. $y^4 - y^3y'' = 1$.
441. $y'^2 = (3y - 2y')\,y''$.
442. $y''(2y' + x) = 1$.
443. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0$.
444. $(1 - x^2)\,y'' + xy' = 2$.
445. $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$.
446. $(y' + 2y)\,y'' = y'^2$.
447. $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$.
448. $y'''y'^2 = y''^3$.
449. $yy'' + y = y'^2$.
450. $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$.

Intégrer les équations en se servant de la formule réduisant l'intégration multiple à une seule intégration (cf. [1], chapitre IV, § 2, point 1) :

451. $xy^{\mathrm{IV}} = 1$.
452. $xy'' = \sin x$.
453. $y''' = 2xy''$.
454. $xy^{\mathrm{IV}} + y''' = e^x$.

Intégrer les équations en les ramenant à une forme telle que leurs membres soient des dérivées totales :

455. $yy''' + 3y'y'' = 0$.
456. $y'y''' = 2y''^2$.
457. $yy'' = y'(y' + 1)$.
458. $5y'''^2 - 3y''y^{\mathrm{IV}} = 0$.
459. $yy'' + y'^2 = 1$.
460. $y'' = xy' + y + 1$.
461. $xy'' = 2yy' - y'$.
462. $xy'' - y' = x^2yy'$.

Abaisser l'ordre des équations données en utilisant leur homogénéité et les intégrer :

463. $xyy'' - xy'^2 = yy'$.
464. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$.
465. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'$.
466. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$.
467. $x^2yy'' = (y - xy')^2$.
468. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}$.

469. $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$.

470. $x^2yy'' + y'^2 = 0$.

471. $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$.

472. $xyy'' = y'(y + y')$.

473. $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$.

474. $x^3y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$.

475. $\frac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \frac{2yy'}{x}$.

476. $y'' = \left(2xy - \frac{5}{x}\right)y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}$.

477. $x^2(2yy'' - y'^2) = 1 - 2xyy'$.

478. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = (2xy' - 3y)\sqrt{x^3}$.

479. $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1$.

480. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3$.

Abaisser l'ordre des équations données et les ramener à des équations du premier ordre:

481. $y''(3 + yy'^2) = y'^4$.

482. $y''^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$.

483. $yy' + 2x^2y'' = xy'^2$.

484. $y'^2 + 2xyy'' = 0$.

485. $2xy^2(xy'' + y') + 1 = 0$.

486. $x(y'' + y'^2) = y'^2 + y'$.

487. $y^2(y'y''' - 2y''^2) = y'^4$.

488. $y(2xy'' + y') = xy'^2 + 1$.

489. $y'' + 2yy'^2 = \left(2x + \frac{1}{x}\right)y'$.

490. $y'y''' = y''^2 + y'^2y''$.

491. $yy'' = y'^2 + 2xy^2$.

492. $y''^4 = y'^5 - yy'^3y''$.

493. $2yy''' = y'$.

494. $y'''y'^2 = 1$.

495. $y^2y''' = y'^3$.

496. $x^2yy'' + 1 = (1 - y)xy'$.

497. $yy'y''' + 2y'^2y'' = 3yy''^2$.

498. $(y'y''' - 3y''^2)y = y'^5$.

499. $y^2(y'y''' - 2y''^2) = yy'^2y'' + 2y'^4$.

500. $x^2(y^2y''' - y'^3) = 2y^2y' - 3xyy'^2$.

Trouver les solutions vérifiant les conditions initiales données:

501. $yy'' = 2xy'^2$; $y(2) = 2$, $y'(2) = 0{,}5$.

502. $2y''' - 3y'^2 = 0$; $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$.

503. $x^2y'' - 3xy' = \frac{6y^2}{x^2} - 4y$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 4$.

504. $y''' = 3yy'$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 4{,}5$.

505. $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y'$; $y(-1) = \frac{\pi}{6}$, $y'(-1) = 2$.

506. Trouver les courbes dont le rayon de courbure est en tout point égal au double du segment de normale compris entre ce point de la courbe et l'axe d'abscisses. On distinguera deux cas : *a*) la courbe est convexe vers l'axe d'abscisses ; *b*) la courbe est concave vers l'axe d'abscisses.

507. Trouver les courbes dont le rayon de courbure est inversement proportionnel au cosinus de l'angle fait par la tangente et l'axe d'abscisses.

508. Déterminer la forme de l'équilibre d'un fil inextensible fixé à ses extrémités et soumis à l'action d'une charge telle que chaque unité de longueur de sa projection horizontale subisse l'action d'une même charge (chaînes d'un pont à chaînes). Négliger le poids du fil.

509. Déterminer la forme de l'équilibre d'un fil homogène inextensible (fixé à ses extrémités) soumis à l'action de son propre poids.

510*. Démontrer que l'équation du mouvement d'un pendule $y'' + \sin y = 0$ a une solution particulière $y(x)$ tendant vers π, quand $x \to +\infty$.

§ 11. Equations linéaires à coefficients constants

1. Pour résoudre une équation linéaire homogène à coefficients constants

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (1)$$

il faut former l'équation caractéristique

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \qquad (2)$$

et trouver toutes ses racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

La solution générale de l'équation (1) est la somme des termes de la forme $C_i e^{\lambda_i x}$ pour chaque racine λ_i de l'équation (2) et des termes de la forme

$$(C_{m+1} + C_{m+2} x + C_{m+3} x^2 + \ldots + C_{m+k} x^{k-1}) e^{\lambda x} \qquad (3)$$

pour chaque racine multiple λ de l'équation (2), où k est la multiplicité de la racine. Tous les C_i sont des constantes arbitraires. Les coefficients de l'équation (1) et les racines λ peuvent dans ce cas être réels ou complexes.

Si, d'autre part, tous les coefficients de l'équation (1) sont réels, sa solution peut alors s'écrire sous une forme réelle même dans le cas des racines complexes λ. Chaque couple de racines conjuguées complexes $\lambda = \alpha \pm \beta i$ fait apparaître, dans la formule de la solution générale, les termes

$$C_{m+1}e^{\alpha x}\cos\beta x + C_{m+2}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

si ces racines sont simples, et les termes

$$P_{k-1}(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{k-1}(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta x$$

si chacune des racines $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$ est de multiplicité k. Ici P_{k-1} et Q_{k-1} sont des polynômes de degré $k - 1$ analogues à celui de (3), leurs coefficients étant des constantes arbitraires.

Exemple. Intégrer l'équation

$$y^{\mathrm{V}} - 2y^{\mathrm{IV}} - 16y' + 32y = 0.$$

Ecrivons son équation caractéristique

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 - 16\lambda + 32 = 0.$$

En mettant le premier membre sous forme d'un produit de facteurs, on trouve les racines:

$$(\lambda - 2)(\lambda^4 - 16) = 0,\ (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4) = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\quad \lambda_3 = -2,\quad \lambda_4 = 2i,\quad \lambda_5 = -2i.$$

Partant des règles ci-dessus, écrivons la solution générale

$$y = (C_1 + C_2x)\,e^{2x} + C_3e^{-2x} + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x$$

(le degré du polynôme $C_1 + C_2x$ est de l'unité inférieur à la multiplicité de la racine $\lambda = 2$).

2. Pour ce qui est des équations linéaires non homogènes à coefficients constants et dont le second membre est composé des sommes et produits des fonctions $b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$, $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, on peut trouver une solution particulière par la méthode des coefficients indéterminés.

Pour des équations dont le second membre est $P_m(x)\,e^{\gamma x}$, où $P_m(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$, la solution particulière est de la forme

$$y_1 = x^sQ_m(x)\,e^{\gamma x}, \tag{4}$$

où $Q_m(x)$ est un polynôme de même degré m. Le nombre s est égal à zéro si γ n'est pas racine de l'équation caractéristique (2) et à la multiplicité, si γ est racine. Pour trouver les coefficients du polynôme $Q_m(x)$, on porte la solution (4) dans l'équation différentielle en égalant les coefficients des termes semblables dans les premier et second membres.

Dans le cas où le sinus et le cosinus figurent au second membre de l'équation, on peut les exprimer en fonction d'exponentielles d'après la formule d'Euler:

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \tag{5}$$

et ramener le problème au cas considéré.

Si, d'autre part, les coefficients du premier membre de l'équation sont réels, l'on peut se passer des fonctions complexes (5). Pour une équation de second membre

$$e^{\alpha x}\,(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x) \tag{6}$$

on cherchera la solution particulière sous la forme

$$y_1 = x^s e^{\alpha x}\,(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x), \tag{7}$$

où s est égal à zéro si $\alpha + \beta i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et à la multiplicité de la racine $\alpha + \beta i$ dans le cas contraire, R_m et T_m étant des polynômes de degré m égal au plus grand des degrés des polynômes P et Q. Pour trouver les coefficients des polynômes R_m et T_m, il faut porter la solution (7) dans l'équation et égaler les coefficients des termes semblables.

Une autre méthode de recherche d'une solution particulière d'une équation à coefficients réels avec second membre de la forme (6) consiste à intégrer d'abord l'équation de second membre $P(x)\,e^{(\alpha+\beta i)x}$. La partie réelle de cette solution sera la solution de l'équation ayant pour second membre $P(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x$, alors que la partie imaginaire est la solution de l'équation dont le second membre est $P(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Si le second membre de l'équation est égal à la somme de quelques fonctions de la forme $P(x)\,e^{\gamma x}$ et (6), la solution particulière se définit alors par la règle ci-dessous.

La solution particulière d'une équation linéaire ayant pour second membre $f_1 + \ldots + f_p$ est la somme des solutions particulières d'équations admettant le même premier membre et $f_1, \ldots, f_p$ pour seconds membres.

La solution générale d'une équation linéaire non homogène est, dans tous les cas, la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation homogène correspondante.

E x e m p l e. Intégrer l'équation

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x}\cos 2x. \tag{8}$$

L'équation caractéristique $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$ admet la racine $\lambda = 3$ de multiplicité 2 et la racine $\lambda = 0$ de multiplicité 1. La solution générale de l'équation homogène est donc de la forme $y_0 = (C_1 + C_2 x)\,e^{3x} + C_3$.

Le second membre de (8) comprend deux termes de la forme (6); pour le premier, on a $\gamma = \alpha + \beta i = 3$, pour le second, $\alpha + \beta i = 3 + 2i$. Ces nombres étant différents, on cherche séparément les solutions particulières des équations

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}, \qquad (9)$$

$$y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x} \cos 2x. \qquad (10)$$

Le nombre $\gamma = 3$ est une racine de multiplicité $s = 2$; il en résulte que la solution particulière de l'équation (9) est, en vertu de (4), de la forme $y_1 = x^2 (ax + b) e^{3x}$. En portant $y = y_1$ dans (9), on trouve $a = 1/18$, $b = -1/18$.

De plus, $\alpha + \beta i = 3 + 2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, donc en vertu de (7), la solution particulière de l'équation (10) est de la forme $y_2 = e^{3x} (c \cos 2x + d \sin 2x)$. En portant $y = y_2$ dans (10), on trouve $c = -3/52$, $d = -1/26$.

La solution générale de l'équation (8) est $y = y_0 + y_1 + y_2$, où y_0, y_1, y_2 sont déjà définis.

3. L'équation linéaire non homogène

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \qquad (11)$$

de second membre $f(x)$ quelconque se résout par la méthode de variation des constantes. Supposons connue la solution générale $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ de l'équation linéaire homogène de même second membre. Dans ce cas, la solution de l'équation (11) que l'on cherche est de la forme

$$y = C_1(x) y_1 + \ldots + C_n(x) y_n.$$

Les fonctions $C_i(x)$ se déduisent du système

$$\begin{aligned} C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n &= 0 \\ C_1' y_1' + \ldots + C_n' y_n' &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\ a_0 (C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)}) &= f(x). \end{aligned}$$

4. L'équation d'Euler

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \qquad (12)$$

se ramène à une équation linéaire à coefficients constants par substitution de la variable indépendante $x = e^t$ pour $x > 0$ (ou $x = -e^t$ pour $x < 0$). Pour l'équation à coefficients constants obtenue, l'équation caractéristique prend la forme

$$a_0 \lambda (\lambda - 1)(\lambda - 2) \ldots (\lambda - n + 1) + \ldots + a_{n-2} \lambda (\lambda - 1) + \\ + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

La formation de cette équation implique la substitution à chaque produit $x^k y^{(k)}$ de (12) d'un produit de k nombres décroissant d'une unité : $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)$.

Exemple. Résoudre l'équation

$$x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3. \qquad (13)$$

Ecrivons immédiatement l'équation caractéristique et résolvons-la :

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2 = 0, \qquad (14)$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2) = 0, \ \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 2.$$

Pour ces λ, la solution générale de l'équation homogène à coefficients constants s'écrit (conformément au point 1) :

$$y_0 = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{2t}.$$

Pour résoudre l'équation non homogène (13), chassons tout d'abord les parenthèses de (14) : $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$. Utilisons cette équation caractéristique pour former le premier membre de l'équation différentielle ; quant au second membre, déduisons-le du second membre de (13) par substitution de $x = e^t$:

$$y'''_t - 4y''_t + 5y'_t - 2y = e^{3t}.$$

Comme le nombre 3 n est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche la solution particulière sous la forme $y_1 = ae^{3t}$. En portant dans l'équation, on obtient $a = 1/4$.

Par conséquent, la solution générale est de la forme :

$$y = y_0 + y_1 = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t} =$$

$$= (C_1 + C_2 \ln x)x + C_3x^2 + \frac{1}{4}x^3 \quad (x > 0).$$

Pour $x < 0$, la formule est analogue, à cela près qu'au lieu de $\ln x$, on a $\ln|x|$.

5. Pour résoudre les problèmes nos 635 à 640 et 879, on peut appliquer les lois ci-dessous de la théorie des circuits électriques.

Pour tout nœud d'un circuit, la somme des courants qui arrivent est égale à celle des courants qui s'écoulent.

La somme algébrique des tensions des sources de courant contenues dans tout contour fermé d'un circuit est égale à la somme algébrique des chutes de tension dans toutes les branches de ce contour.

La chute de tension dans une résistance R est égale à RI ; dans une inductance pure L elle est $L\frac{dI}{dt}$ et dans un condensateur de capacité C on a q/C, où $q = q(t)$ est la charge du condensateur à l'ins-

tant t et $\frac{dq}{dt} = I$; dans tous les trois cas, $I = I(t)$ est l'intensité du courant passant par la partie considérée du circuit à l'instant t. Dans ces formules, I s'exprime en ampères, R en ohms, L en henrys, q en coulombs, C en farads, t en secondes et la tension en volts.

E x e m p l e. Soient branchées en série une source de courant dont la tension varie d'après la loi $E = V \sin \omega t$, une résistance R et une capacité C. Déterminer l'intensité du courant dans le circuit au régime stationnaire *).

S o l u t i o n. L'intensité du courant $I = I(t)$ est une grandeur constante sur toute partie d'un circuit (selon la loi d'un circuit série). La chute de tension dans la résistance est égale à RI, celle de la capacité est q/C. D'où $RI + \frac{q}{C} = V \sin \omega t$. En dérivant et compte tenu de $\frac{dq}{dt} = I$, on obtient

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = V\omega \cos \omega t, \qquad (15)$$

qui est une équation linéaire à coefficients constants. Pour déterminer le régime stationnaire, trouvons une solution périodique de cette équation. En partant de la forme du second membre de l'équation, on cherche la solution sous la forme:

$$I = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t. \qquad (16)$$

En portant (16) dans (15) et en égalant les coefficients des termes semblables, on aboutit à un système de deux équations dont on peut déduire A_1 et B_1. En électrotechnique, les paramètres A_1 et B_1 sont moins importants que l'amplitude de variation de l'intensité du courant. C'est la raison pour laquelle l'expression (16) s'écrit sous la forme:

$$I = A \sin (\omega t - \varphi). \qquad (17)$$

En portant (17) dans (15), en passant aux fonctions trigonométriques des angles ωt et φ et en égalant d'abord les coefficients de $\sin \omega t$, puis de $\cos \omega t$, on obtient

$$RA\omega \sin \varphi + \frac{A}{C} \cos \varphi = 0, \qquad RA\omega \cos \varphi - \frac{A}{C} \sin \varphi = V\omega.$$

D'où il vient

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{RC\omega}, \quad A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}}.$$

---

*) Un régime stationnaire est celui auquel l'intensité du courant reste constante ou varie périodiquement.

Expliquons pourquoi la solution périodique trouvée s'appelle régime stationnaire. La solution générale de l'équation (15) est la somme de la solution particulière (17) et de la solution générale de l'équation linéaire homogène

$$R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=0. \tag{18}$$

Comme la solution de (18) $I = Ke^{-t/RC}$ (K est ici une constante arbitraire) tend vers zéro pour $t \to +\infty$, toute solution de (15), pour $t \to +\infty$, tend indéfiniment (et ceci avec une rapidité élevée) vers la solution périodique trouvée (17).

Intégrer les équations:

511. $y'' + y' - 2y = 0$.
512. $y'' + 4y' + 3y = 0$.
513. $y'' - 2y' = 0$.
514. $2y'' - 5y' + 2y = 0$.
515. $y'' - 4y' + 5y = 0$.
516. $y'' + 2y' + 10y = 0$.
517. $y'' + 4y = 0$.
518. $y''' - 8y = 0$.
519. $y^{IV} - y = 0$.
520. $y^{IV} + 4y = 0$.
521. $y^{VI} + 64y = 0$.
522. $y'' - 2y' + y = 0$.
523. $4y'' + 4y' + y = 0$.
524. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.
525. $y^{V} - 10y''' + 9y' = 0$.
526. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.
527. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
528. $y''' - y'' - y' + y = 0$.
529. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.
530. $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$.
531. $y''' - 3y' + 2y = 0$.
532. $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$.
533. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.
534. $y'' + y = 4xe^{x}$.
535. $y'' - y = 2e^{x} - x^{2}$.
536. $y'' + y' - 2y = 3xe^{x}$.
537. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.
538. $y'' + y = 4 \sin x$.
539. $y'' - 5y' + 4y = 4x^{2}e^{2x}$.
540. $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$.
541. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.
542. $y'' + 2y' - 3y = x^{2}e^{x}$.
543. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.
544. $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$.
545. $y'' - 2y' + y = 6xe^{x}$.
546. $y'' + y = x \sin x$.
547. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$.
548. $y'' - 5y' = 3x^{2} + \sin 5x$.

Chercher une solution particulière des équations suivantes sans calculer les coefficients indéterminés:

549. $y'' - 2y' + 2y = e^{x} + x \cos x$.
550. $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x} \cos x$.
551. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x$.
552. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x} \cos 5x$.

553. $y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x \sin 2x$.
554. $y'' - 2y' + y = 2xe^x + e^x \sin 2x$.
555. $y'' - 8y' + 17y = e^{4x}(x^2 - 3x \sin x)$.
556. $y''' + y' = \sin x + x \cos x$.
557. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x} \sin 2x + 2x^2$.
558. $y'' - 6y' + 8y = 5xe^{2x} + 2e^{4x} \sin x$.
559. $y'' + 2y' + y = x(e^{-x} - \cos x)$.
560. $y''' - y'' - y' + y = 3e^x + 5x \sin x$.
561 $y'' - 6y' + 13y = x^2e^{3x} - 3 \cos 2x$.
562. $y'' - 9y = e^{-3x}(x^2 + \sin 3x)$.
563. $y^{IV} + y'' = 7x - 3 \cos x$. 564. $y'' + 4y = \cos x \cdot \cos 3x$.
565. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^{2x}$.
566. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin^2 x$.
567. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \cos^2 x$.
568. $y'' - 2y' + 2y = (x + e^x) \sin x$.
569. $y^{IV} + 5y'' + 4y = \sin x \cdot \cos 2x$.
570. $y'' - 3y' + 2y = 2^x$. 571. $y'' - y = 4 \operatorname{sh} x$.
572. $y'' + 4y' + 3y = \operatorname{ch} x$. 573. $y'' + 4y = \operatorname{sh} x \cdot \sin 2x$.
574. $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{ch} x \cdot \sin x$.

Intégrer les équations suivantes par la méthode de variation des constantes:

575. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$. 576. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$.
577. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$. 578. $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$.
579. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x + 1}$.
580. $y'' + y = 2 \sec^3 x$.
581*. $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$.

Trouver les solutions des équations satisfaisant aux conditions initiales données:

582. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(2) = 1$, $y'(2) = -2$.
583. $y'' + y = 4e^x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.
584. $y'' - 2y' = 2e^x$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.
585. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.
586. $y''' - y' = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.
587. $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$; $y''(0) = 3$.
588. $y^{IV} + y'' = 2 \cos x$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$,
$y''(0) = y'''(0) = 0$.

Intégrer les équations d'Euler:

589. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$ 590. $x^2y'' - xy' - 3y = 0.$

591. $x^3y''' + xy' - y = 0.$ 592. $x^2y''' = 2y'.$

593. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3.$ 594. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x.$

595. $x^3y'' - 2xy = 6 \ln x.$ 596. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2.$

597. $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2.$ 598. $x^2y'' - 2y = \sin \ln x.$

599. $(x-2)^2 y'' - 3(x-2) y' + 4y = x.$

600. $(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3) y' - 6y = 0.$

Intégrer les équations suivantes en appliquant les méthodes développées précédemment:

601. $y'' + 2y' + y = \cos ix.$ 602. $y'' - 2y' + y = xe^x \sin^2 ix.$

603. $y'' + 2iy = 8e^x \sin x.$ 604. $y'' + 2iy' - y = 8 \cos x.$

605. $y''' - 8iy = \cos 2x.$ 606. $y'' = \frac{2y}{x^2} = 3 \ln(-x).$

607. $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}.$

608. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(\cos^2 x + \operatorname{tg} x).$

609. $x^2y'' - 2y = \frac{3x^2}{x+1}.$

610. $x^2y'' - xy' + y = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x}.$

611*. $y'' + y = f(x).$

612*. A quelles conditions doit satisfaire la fonction $f(x)$ pour que toutes les solutions de l'équation n° 611 restent bornées lorsque $x \to +\infty$?

Déterminer les équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants (du plus bas ordre) admettant les solutions particulières ci-dessous:

613. $y_1 = x^2e^x.$ 614. $y_1 = e^{2x} \cos x.$

615. $y_1 = x \sin x.$ 616. $y_1 = xe^x \cos 2x.$

617. $y_1 = xe^x,\ y_2 = e^{-x}.$ 618. $y_1 = x,\ y_2 = \sin x.$

619. Pour quelles valeurs de a et b les solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ sont-elles bornées sur tout l'axe numérique $-\infty < x < \infty$?

620. Pour quelles valeurs de a et b les solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ tendent-elles vers zéro quand $x \to +\infty$?

621. Pour quelles valeurs de a et b l'équation $y'' + ay' + by = 0$ admet-elle au moins une solution $y(x) \not\equiv 0$ qui tend vers zéro quand $x \to +\infty$?

622. Pour quelles valeurs de a et b chaque solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$, à l'exception de la solution triviale

$y(x) \equiv 0$, est-elle monotone croissante en valeur absolue à partir d'un certain x?

623. Pour quelles valeurs de a et b chaque solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ s'annule-t-elle sur une infinité de points x?

624*. Pour quelles valeurs de a et b les solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ satisfont-elles à la relation $y = o(e^{-x})$ quand $x \to +\infty$?

625*. Le coefficient $b > 0$ étant donné, trouver un a tel que la solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$, vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, tende le plus vite possible vers zéro quand $x \to +\infty$.

626. Pour quelles valeurs de k et ω l'équation $y'' + k^2y = \sin \omega t$ admet-elle au moins une solution périodique?

627. Trouver la solution périodique de l'équation $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \sin \omega t$ et représenter graphiquement l'amplitude en fonction de ω.

628. Trouver la solution périodique de l'équation $\ddot{x} + \dot{x} + 4x = e^{i\omega t}$ et construire dans le plan complexe la courbe parcourue par le facteur de l'amplitude de cette solution quand ω varie de 0 à $+\infty$.

629*. Soit donnée l'équation $y'' + ay' + by = f(x)$, où $|f(x)| \leqslant m$ $(-\infty < x < \infty)$ et les racines de l'équation caractéristique $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Trouver une solution qui soit bornée pour $-\infty < x < \infty$. Montrer que : a) toutes les autres solutions tendent indéfiniment vers cette solution pour $x \to +\infty$, b) si $f(x)$ est périodique, cette solution l'est aussi.

Indication. Appliquer la méthode de variation des constantes. Les limites inférieures des intégrales obtenues doivent être infinies et d'un signe tel qu'elles soient convergentes.

Dans les problèmes nos 630 à 632, on admettra que le poids écarté de x par rapport à son état d'équilibre y est rappelé avec l'effort kx exercé par le ressort.

630. Trouver la période d'oscillations libres d'une masse m qui, suspendue à un ressort, se déplace sans résistance.

631. Un poids de masse m est suspendu à l'extrémité d'un ressort dont l'autre est fixe. Quand la vitesse de son mouvement est égale à v, la force de résistance est hv. Le poids, qui se trouve en équilibre à l'instant $t = 0$, est mis en mouvement avec une vitesse v_0. Etudier le mouvement du poids lorsque $h^2 < 4km$ et $h^2 > 4km$.

632. Même problème en supposant que le poids est soumis en plus à une force périodique extérieure $f = b \sin \omega t$. Montrer que,

quelles que soient les conditions initiales, le mouvement du poids tendra à devenir périodique. Trouver ce mouvement périodique (oscillations forcées).

633. Une tige élastique supporte à l'une de ses extrémités une masse m, l'autre vibrant de façon à avoir à l'instant t un déplacement égal à $B \sin \omega t$. La force élastique qui apparaît dans la tige est proportionnelle à la différence des déplacements de ses extrémités. Trouver l'amplitude A des oscillations forcées de la masse m. Est-il possible que $A > B$? (Négliger la masse de la tige et le frottement.)

634. Une particule de masse m se déplace sur l'axe Ox sous l'action d'une force $3mr_0$ qui la repousse du point $x = 0$, et d'une force $4mr_1$ qui l'attire vers le point $x = 1$, r_0 et r_1 étant respectivement les distances à ces points. Déterminer le mouvement de la particule avec les conditions initiales

$$x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

635. Un circuit électrique comprend une source de courant continu de tension V, une résistance R, une inductance L et un interrupteur, connectés en série, ce dernier étant fermé à l'instant $t = 0$. Exprimer l'intensité du courant en fonction du temps (pour $t > 0$).

636. Même problème en remplaçant l'inductance L par un condensateur de capacité C. Le condensateur est déchargé avant la fermeture du circuit.

637. Soient branchés en série: une résistance R et un condensateur de capacité C dont la charge à l'instant $t = 0$ est q. Le circuit est fermé pour $t = 0$. Trouver l'intensité du courant dans le circuit pour $t > 0$.

638. Soient branchés en série: une inductance L, une résistance R et un condensateur de capacité C dont la charge à l'instant $t = 0$ est égale à q. Le circuit est fermé à l'instant $t = 0$. Trouver l'intensité du courant dans le circuit et la fréquence des oscillations dans le cas où la décharge est d'un caractère ondulatoire.

639. Soient branchées en série: une source de courant dont la tension varie suivant la loi $E = V \sin \omega t$, une résistance R et une inductance L. Trouver l'intensité du courant dans le circuit (régime stationnaire).

640. Soient branchées en série: une source de courant dont la tension varie d'après la loi $E = V \sin \omega t$, une résistance R, une inductance L et une capacité C. Trouver l'intensité du courant dans le circuit (régime stationnaire). Pour quelle valeur de la fréquence ω l'intensité est-elle maximale?

§ 12. Equations linéaires à coefficients variables

1. La plupart des problèmes de ce paragraphe se résolvent par les méthodes de la théorie générale des équations différentielles linéaires (cf. [1], chapitre V, §§ 2 et 3 ou [4], chapitre 2, §§ 3 et 5), ainsi que par celles de l'analyse qualitative des équations linéaires du second ordre (cf. [1], chapitre VI, § 2, points 1 et 3). Pour les autres problèmes, on se reportera aux indications ou aux références.

2. Lorsqu'on connaît une solution particulière y_1 d'une équation linéaire homogène d'ordre n, on peut abaisser l'ordre de cette équation tout en lui conservant sa linéarité. Pour cela, il faut porter $y = y_1 z$ dans l'équation et abaisser l'ordre par la substitution $z' = u$.

Pour trouver la solution générale de l'équation linéaire homogène du second ordre $a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0$, dont on connaît une solution particulière y_1, on peut abaisser l'ordre de l'équation par la méthode mentionnée plus haut. Toutefois, il est plus commode d'utiliser la formule d'Ostrogradski-Liouville:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)\,dx}, \qquad p(x) = \frac{a_1 x}{a_0(x)},$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions quelconques de l'équation donnée.

E x e m p l e. Soit donnée la solution particulière $y_1 = x$ de l'équation

$$(x^2 + 1)\,y'' - 2xy' + 2y = 0. \qquad (1)$$

En vertu de la formule d'Ostrogradski-Liouville, on obtient

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)dx}; \quad y_1 y_2' - y_1' y_2 = C(x^2 + 1).$$

Comme la fonction y_1 est connue, nous avons donc abouti à une équation linéaire du premier ordre par rapport à y_2 qui s'intègre facilement par la méthode suivante. Une division des deux membres de l'équation par y_1^2 fait apparaître dans le premier membre la dérivée de la fraction y_2/y_1:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{C(x^2+1)}{y_1^2}.$$

Comme $y_1 = x$, on a:

$$\frac{y_2}{y_1} = \int C \cdot \frac{x^2+1}{x^2}\,dx + C_2 = C\left(x - \frac{1}{x}\right) + C_2; \quad y_2 = C(x^2 - 1) + C_2 x.$$

C'est la solution générale de l'équation (1).

3. Il n'existe pas de méthode générale pour trouver une solution particulière d'une équation linéaire du second ordre ; toutefois, dans certains cas, on réussit à la déterminer par tâtonnements.

E x e m p l e. Trouver, si elle existe, une solution particulière de l'équation

$$(1 - 2x^2)\, y'' + 2y' + 4y = 0 \qquad (2)$$

sous forme d'un polynôme algébrique.

Déterminons d'abord le degré du polynôme. Portant $y = x^n + \ldots$ dans l'équation (2) et en groupant seulement les termes de la plus grande puissance de x, on aura : $-2x^2 \times n(n-1)x^{n-2} + \ldots + 4x^n + \ldots = 0$. Egalant ce coefficient à zéro, on obtient : $-2n(n-1) + 4 = 0$; $n^2 - n - 2 = 0$. D'où $n_1 = 2$; la racine $n_2 = -1$ n'est pas valable (le degré du polynôme est un entier positif). Le polynôme ne peut donc être que du second degré. Cherchons-le sous la forme $y = x^2 + ax + b$. Portant dans l'équation (2), on obtient $(4a + 4)\,x + 2 + 2a + 4b = 0$. D'où $4a + 4 = 0$, $2 + 2a + 4b = 0$ et $a = -1$, $b = 0$. Par conséquent, le polynôme $y = x^2 - x$ est la solution particulière cherchée.

4. Dans la résolution des problèmes n[os] 738 à 750 on se servira des propositions suivantes qui résultent, par exemple, de [5], chapitre V, § 7.

Soit $|f(t)| \leqslant \dfrac{c}{t^{1+\alpha}}$ pour $t_0 \leqslant t < \infty$; $c, \alpha = \text{const} > 0$.
Alors

1) l'équation $u'' + (1 + f(t))\,u = 0$ possède deux solutions linéairement indépendantes telles que, pour $t \to +\infty$, on ait

$$u_1(t) = \cos t + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right), \quad u_2(t) = \sin t + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right);$$

2) l'équation $u'' - (1 - f(t))\,u = 0$ possède deux solutions linéairement indépendantes telles que, pour $t \to +\infty$, on ait

$$u_1(t) = e^t\left(1 + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right), \quad u_2 = e^{-t}\left(1 + O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right).$$

Etablir si les fonctions données sont linéairement dépendantes dans leurs domaines de définition :

641. $x + 2,\ \ x - 2.$ **642.** $6x + 9,\ \ 8x + 12.$
643. $\sin x,\ \ \cos x.$ **644.** $1,\ x,\ x^2.$
645. $4 - x,\ 2x + 3,\ 6x + 8.$
646. $x^2 + 2x,\ 3x^2 - 1,\ x + 4.$
647. $x^2 - x + 3,\ 2x^2 + x,\ 2x - 4.$
648. $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}.$ **649.** $x,\ e^x,\ xe^x.$

650. 1, $\sin^2 x$, $\cos 2x$. 651. $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $2 + e^x$.
652. $\ln (x^2)$, $\ln 3x$, 7. 653. x, 0, e^x.
654. $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $2e^x - 1$, $3e^x + 5$.
655. 2^x, 3^x, 6^x. 656. $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$.
657. $\sin x$, $\sin (x + 2)$, $\cos (x - 5)$.
658. $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{x+2}$.
659. $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,cotg} x$, 1. 660. x^2, x, $|x|$.
661. x, $|x|$, $2x + \sqrt{4x^2}$. 662. x, x^3, $|x^3|$.

663. a) Dire si les fonctions représentées graphiquement sur la figure 1 sont linéairement dépendantes sur l'intervalle $[a, b]$. b) La même question pour les fonctions de la figure 2.

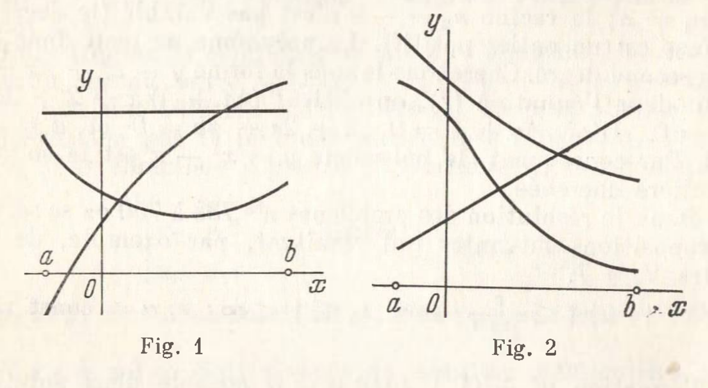


Fig. 1 Fig. 2

664. On sait que le wronskien des fonctions $y_1, \ldots, y_n$ est nul au point x_0 et non nul au point x_1. Que peut-on dire sur la dépendance (l'indépendance) linéaire de ces fonctions sur l'intervalle $[x_0, x_1]$?

665. Le wronskien des fonctions $y_1, \ldots, y_n$ est égal à zéro pour tous les x. Etudier la dépendance linéaire de ces fonctions.

666. Etudier le wronskien des fonctions $y_1, \ldots, y_n$, si l'on sait qu'elles sont: a) linéairement dépendantes; b) linéairement indépendantes.

667. Les fonctions $y_1 = x$, $y_2 = x^5$, $y_3 = |x^5|$ vérifient l'équation $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$. Etudier leur dépendance linéaire dans l'intervalle $(-1, 1)$. Discuter.

668. Montrer que deux solutions de l'équation $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$ (à coefficients continus), prenant leur maximum pour un même x, sont linéairement dépendantes.

669. Soient données 4 solutions de l'équation $y''' + xy = 0$, dont les graphiques sont tangents en un point. Trouver parmi ces solutions celles qui sont linéairement indépendantes.

670. Utilisant la proposition connue sur l'intervalle d'existence de la solution d'une équation linéaire ([1], chapitre V, fin du § 1), déterminer (sans résoudre les équations) l'intervalle d'existence de la solution des équations suivantes vérifiant les conditions initiales indiquées : a) $(x+1)\,y'' - 2y = 0$, $y\,(0) = 0$, $y'\,(0) = 2$; b) $y'' + y \operatorname{tg} x = 0$, $y\,(5) = 1$, $y'\,(5) = 0$.

671. Dire si les graphiques de deux solutions de l'équation $y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\,y = 0$ (à coefficients continus) peuvent dans le plan x, y : a) se couper ; b) être tangents.

672. Pour quelles valeurs de n l'équation du problème nº 671 admet-elle $y = x^3$ pour solution ?

673. Etablir l'ordre de l'équation linéaire homogène qui admet dans l'intervalle $(-1, 1)$ les quatre solutions particulières suivantes : $y_1 = x^2 - 2x + 2$, $y_2 = (x-2)^2$, $y_3 = x^2 + x - 1$, $y_4 = 1 - x$.

Former une équation différentielle linéaire homogène (du plus bas ordre) possédant les solutions particulières :

674. 1, $\cos x$. 675. x, e^x. 676. $3x$, $x - 2$, $e^x + 1$.

677. $x^2 - 3x$, $2x^2 + 9$, $2x + 3$. 678. e^x, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$.

679. x, x^2, e^x. 680. x, x^3, $|x^3|$.

Trouver les solutions générales des équations données en supposant connues leurs solutions particulières. Dans les problèmes dont la solution particulière n'est pas donnée, on peut la rechercher, par exemple, sous forme d'une fonction exponentielle $y_1 = e^{ax}$ ou d'un polynôme algébrique $y_1 = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$:

681. $(2x+1)\,y'' + 4xy' - 4y = 0$.

682. $x^2(x+1)\,y'' - 2y = 0$; $y_1 = 1 + \frac{1}{x}$.

683. $xy'' - (2x+1)\,y' + (x+1)\,y = 0$.

684. $xy'' + 2y' - xy = 0$; $y_1 = \frac{e^x}{x}$.

685. $y'' - 2\,(1 + \operatorname{tg}^2 x)\,y = 0$; $y_1 = \operatorname{tg} x$.

686. $x\,(x-1)\,y'' - xy' + y = 0$.

687. $(e^x + 1)\,y'' - 2y' - e^x y = 0$; $y_1 = e^x - 1$.

688. $x^2 y'' \ln x - xy' + y = 0$.

689. $y'' - y' \operatorname{tg} x + 2y = 0$; $y_1 = \sin x$.

690. $(x^2 - 1)\,y'' + (x-3)\,y' - y = 0$.

691. $xy'' - (x+1)\,y' - 2\,(x-1)\,y = 0$.

692. $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)\,y = 0$; $y_1 = e^{ax^2}$.

693. $xy'' - (2x+1)\,y' + 2y = 0$.

694. $x(2x+1)y''+2(x+1)y'-2y=0$.
695. $x(x+4)y''-(2x+4)y'+2y=0$.
696. $x(x^2+6)y''-4(x^2+3)y'+6xy=0$.
697. $(x^2+1)y''-2y=0$.
698. $2x(x+2)y''+(2-x)y'+y=0$.
699. $xy'''-y''-xy'+y=0$; $y_1=x$, $y_2=e^x$.
700. $x^2(2x-1)y'''+(4x-3)xy''-2xy'+2y=0$;
$y_1=x$, $y_2=1/x$.
701. $(x^2-2x+3)y'''-(x^2+1)y''+2xy'-2y=0$;
$y_1=x$, $y_2=e^x$.

Trouver la solution générale de l'équation linéaire non homogène si l'on sait qu'une solution particulière de l'équation homogène correspondante est un polynôme:

702. $(x+1)xy''+(x+2)y'-y=x+\frac{1}{x}$.
703. $(2x+1)y''+(2x-1)y'-2y=x^2+x$.

Connaissant deux solutions particulières de l'équation linéaire non homogène du second ordre, trouver sa solution générale:

704. $(x^2-1)y''+4xy'+2y=6x$; $y_1=x$, $y_2=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.
705. $(3x^3+x)y''+2y'-6xy=4-12x^2$;
$y_1=2x$, $y_2=(x+1)^2$.

Eliminer la dérivée première par la substitution linéaire $y=a(x)z$:

706. $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=0$.
707. $x^2y''-4xy'+(6-x^2)y=0$.
708. $(1+x^2)y''+4xy'+2y=0$.
709. $x^2y''+2x^2y'+(x^2-2)y=0$.
710. $xy''+y'+xy=0$.

Eliminer la dérivée première par la substitution de la variable indépendante $t=\varphi(x)$:

711. $xy''-y'-4x^3y=0$. 712. $(1+x^2)y''+xy'+y=0$.
713. $x^2(1-x^2)y''+2(x-x^3)y'-2y=0$.
714. $y''-y'+e^{4x}y=0$. 715. $2xy''+y'+xy=0$.

716. Ecrire la solution générale de l'équation linéaire non homogène du second ordre dont trois solutions particulières sont $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=x^2$.

717. Que peut-on dire de la fonction $p(x)$ si l'on sait que toutes les solutions de l'équation $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ tendent avec leurs dérivées premières vers zéro pour $x \to +\infty$?

Indication. Appliquer la formule de Liouville.

718. Démontrer que pour $q(x) < 0$ les solutions de l'équation $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ne peuvent admettre de maxima positifs.

719. Etablir le lieu géométrique des points de courbure des graphiques des solutions de l'équation $y'' + q(x)y = 0$.

720. Etablir si les graphiques de deux solutions de l'équation $y'' + q(x)y = 0$ (la fonction $q(x)$ est continue) peuvent se disposer comme sur les figures 3*a*, 3*b*, 3*c*, 3*d*.

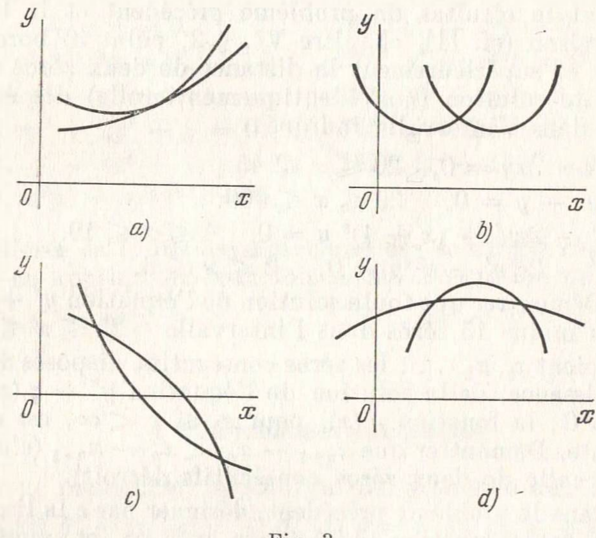


Fig. 3

721. Montrer que le rapport de deux solutions quelconques linéairement indépendantes de l'équation $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (à coefficients continus) ne présente pas de points de maximum local.

722. Démontrer que, lorsque $q(x) > 0$, pour toute solution de l'équation $y'' + q(x)y = 0$, le rapport $y'(x)/y(x)$ décroît lorsque x croît dans l'intervalle où $y(x) \neq 0$.

723. Démontrer que, lorsque $q(x) \leqslant 0$, toutes les solutions de l'équation $y'' + q(x)y = 0$ vérifiant les conditions initiales positives $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$, restent positives pour tous les $x > x_0$.

724. Démontrer que la solution de l'équation $y'' - x^2y = 0$, vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, est une fonction paire, toujours positive.

725*. Démontrer que, lorsque $q(x) \leqslant 0$, le problème aux limites

$$y'' + q(x)\,y = 0, \quad y(x_1) = a, \quad y(x_2) = b$$

possède une solution et une seule quels que soient a, b et $x_1 \neq x_2$. Prouver que cette solution est une fonction monotone quand $b = 0$.

726. Trouver la distance entre deux zéros voisins de toute solution (non identiquement nulle) de l'équation $y'' + my = 0$, où $m = \text{const} > 0$. Combien de zéros comprend l'intervalle $a \leqslant x \leqslant b$?

Utilisant le résultat du problème précédent et le théorème de comparaison (cf. [1], chapitre VI, § 2, point 3) borner inférieurement et supérieurement la distance de deux zéros consécutifs de toute solution (non identiquement nulle) des équations ci-dessous dans l'intervalle indiqué:

727. $y'' + 2xy = 0, \quad 20 \leqslant x \leqslant 45.$

728. $xy'' + y = 0, \quad 25 \leqslant x \leqslant 100.$

729. $y'' - 2xy' + (x+1)^2\,y = 0, \quad 4 \leqslant x \leqslant 19.$

730. $y'' - 2e^xy' + e^{2x}y = 0, \quad 2 \leqslant x \leqslant 6.$

731*. Démontrer que toute solution de l'équation $y'' + xy = 0$ possède au moins 15 zéros dans l'intervalle $-25 \leqslant x \leqslant 25$.

732. Soient $x_1, x_2, \ldots$ les zéros consécutifs, disposés dans l'ordre de croissance, de la solution de l'équation $y'' + q(x)\,y = 0$, où $q(x) > 0$; la fonction $q(x)$, pour $x_1 \leqslant x < \infty$, est continue et croissante. Démontrer que $x_{n+1} - x_n < x_n - x_{n-1}$ (c'est-à-dire que l'intervalle de deux zéros consécutifs décroît).

733. Dans le problème précédent, désigner par c la limite finie ou infinie de la fonction $q(x)$ pour $x \to \infty$ et montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = \pi/\sqrt{c}$.

734*. Soient y et z les solutions respectives des équations $y'' + q(x)\,y = 0$ et $z'' + Q(x)\,z = 0$ vérifiant les mêmes conditions initiales $y(x_0) = z(x_0)$, $y'(x_0) = z'(x_0)$; dans l'intervalle (x_0, x_1) on a $Q(x) > q(x)$, $y(x) > 0$, $z(x) > 0$. Montrer que le rapport $z(x)/y(x)$ décroît dans cet intervalle.

735*. Soient remplies les conditions du problème nº 732 et soit $b_n = \max\limits_{x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}} |y(x)|$. Montrer que $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots$

736*. Supposons que dans le problème nº 733, c soit une limite finie. Montrer que $b_n \to B > 0$ pour $n \to \infty$ (les notations sont celles du problème nº 735).

737*. Par le changement de la variable indépendante $t = \varphi(x)$, ramener l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} \pm \frac{y}{(\psi(x))^4} = 0$ à la forme $\frac{d^2y}{dt^2} + b(t)\frac{dy}{dt} \pm \pm y = 0$, éliminer ensuite la dérivée première par la substitution $y = a(t)u$. (Cette transformation est dite de Liouville. Dans bien des cas elle permet de ramener l'équation $y'' + q(x)y = 0$ à une équation analogue, mais de coefficient de y « presque constant » (faiblement variable dans l'intervalle (t_0, ∞)). Ceci facilite l'étude du comportement asymptotique de la solution lorsque $x \to \infty$.)

Etudier le comportement asymptotique des solutions des équations données, pour $x \to +\infty$, en utilisant la transformation de Liouville (voir problème n° 737) et les propositions du point 4 (page 55):

738. $y'' + x^4y = 0$. **739.** $y'' - x^2y = 0$.

740. $y'' + x^2y = 0$. **741.** $y'' + e^{2x}y = 0$.

742. $xy'' - y = 0$. **743.** $y'' - xy = 0$.

744. $xy'' + 2y' + y = 0$. **745.** $y'' - 2(x-1)y' + x^2y = 0$.

746*. $y'' + (x^4 + 1)y = 0$. **747*.** $(x^2 + 1)y'' - y = 0$.

748*. $x^2y'' + y\ln^2 x = 0$.

Améliorer la forme asymptotique des solutions des équations données en appliquant deux fois la transformation de Liouville:

749*. $y'' - 4x^2y = 0$. **750*.** $xy'' + y = 0$.

§ 13. Problèmes aux limites

1. Pour rechercher la solution du problème aux limites

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \qquad (1)$$

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0; \quad \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0 \qquad (2)$$

il faut porter la solution générale de l'équation (1) dans les conditions aux limites (2) et en déduire (si c'est possible) les constantes arbitraires de la solution générale. Contrairement au problème aux valeurs initiales (problème de Cauchy), le problème aux limites ne possède pas toujours une solution.

2. On appelle fonction de Green du problème aux limites (1), (2) la fonction $G(x, s)$ définie pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $x_0 \leqslant s \leqslant x_1$, et possédant (comme fonction de x), pour tout s fixé de l'intervalle $[x_0, x_1]$, les propriétés suivantes:

1) pour $x \neq s$ elle vérifie l'équation

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0; \qquad (3)$$

2) pour $x = x_0$ et $x = x_1$ elle satisfait les conditions aux limites données (2);

3) pour $x = s$ elle est continue en x et sa dérivée par rapport à x présente un saut égal à $1/a_0(s)$, c'est-à-dire

$$G(s+0, s) = G(s-0, s), \quad G'_x|_{x=s+0} = G'_x|_{x=s-0} + \frac{1}{a_0(s)}. \qquad (4)$$

Pour définir la fonction de Green du problème aux limites (1), (2), il faut trouver deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ (distinctes de $y(x) \equiv 0$) de l'équation (3) satisfaisant respectivement aux première et deuxième conditions aux limites (2). Si $y_1(x)$ ne vérifie pas les deux conditions aux limites à la fois, la fonction de Green existe et peut être cherchée sous la forme

$$G(x, s) = \begin{cases} ay_1(x) & (x_0 \leqslant x \leqslant s), \\ by_2(x) & (s \leqslant x \leqslant x_1). \end{cases} \qquad (5)$$

Les fonctions a et b dépendent de s et se définissent à partir des conditions de (4), c'est-à-dire

$$by_2(s) = ay_1(s), \quad by_2'(s) = ay_1'(s) + \frac{1}{a_0(s)}.$$

3. Si la fonction de Green $G(x, s)$ existe, la solution du problème aux limites (1), (2) se met sous la forme

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) f(s)\, ds.$$

4. On appelle valeur propre du problème

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = \lambda y, \qquad (6)$$

$$\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0, \quad \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0 \qquad (7)$$

un nombre λ tel que l'équation (6) admette une solution $y(x) \not\equiv 0$ vérifiant les conditions aux limites (7). Cette solution $y(x)$ est dite fonction propre.

Trouver les solutions des équations vérifiant les conditions aux limites indiquées:

751. $y'' - y = 2x$; $y(0) = 0$, $y(1) = -1$.

752. $y'' + y' = 1$; $y'(0) = 0$, $y(1) = 1$.

753. $y'' - y' = 0$; $y(0) = -1$, $y'(1) - y(1) = 2$.

754. $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

755. $y'' + y = 1$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

756. $y'' + y = 2x - \pi$; $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

757. $y'' - y' - 2y = 0$; $y'(0) = 2$, $y(+\infty) = 0$.

758. $y'' - y = 1$; $y(0) = 0$, $y(x)$ est borné pour $x \to +\infty$.

759. $y'' - 2iy = 0$; $y(0) = -1$, $y(+\infty) = 0$.

760. $x^2y'' - 6y = 0$; $y(0)$ est borné, $y(1) = 2$.

761. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$; $y(x) = o(x)$ pour $x \to 0$, $y(1) = 3$.

762. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$; $y'(1) = 3$, $y(x) = O(x^{-2})$ pour $x \to +\infty$.

763*. Pour quelles valeurs de a le problème aux limites $y'' + ay = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, n'admet-il pas de solutions?

Construire la fonction de Green pour les problèmes aux limites:

764. $y'' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

765. $y'' + y = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

766. $y'' + y' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

767. $y'' - y = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y'(2) + y(2) = 0$.

768*. $y'' + y = f(x)$; $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$.

769. $x^2y'' + 2xy' = f(x)$; $y(1) = 0$, $y'(3) = 0$.

770. $xy'' - y' = f(x)$; $y'(1) = 0$, $y(2) = 0$.

771. $x^2y'' - 2y = f(x)$; $y(1) = 0$, $y(2) + 2y'(2) = 0$.

772. $y'' = f(x)$; $y(0) = 0$, $y(x)$ est borné pour $x \to +\infty$.

773. $y'' + y' = f(x)$; $y'(0) = 0$, $y(+\infty) = 0$.

774. $xy'' + y' = f(x)$; $y(1) = 0$, $y(x)$ est borné pour $x \to +\infty$.

775. $y'' + 4y' + 3y = f(x)$; $y(0) = 0$, $y(x) = O(e^{-2x})$ pour $x \to +\infty$.

776. $x^2y'' + xy' - y = f(x)$; $y(1) = 0$, $y(x)$ est borné pour $x \to +\infty$.

777. $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x)$; $y(0)$ est borné, $y(1) = 0$.

778. $y'' - y = f(x)$; $y(x)$ est borné pour $x \to \pm\infty$.

779. $x^2y'' - 2y = f(x)$; $y(x)$ est borné pour $x \to 0$ et pour $x \to +\infty$.

780. Pour quelles valeurs de a existe la fonction de Green du problème aux limites $y'' + ay = f(x)$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$?

781*. Borner inférieurement et supérieurement la solution du problème $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x)$, $y(x)$ étant borné pour $x \to 0$ et pour $x \to +\infty$, et sa dérivée première, si l'on sait que $0 \leqslant f(x) \leqslant m$.

Indication. Ecrire la solution en utilisant la fonction de Green.

Dans les problèmes ci-dessous, trouver les valeurs et fonctions propres:

782. $y'' = \lambda y$; $y(0) = 0$, $y(l) = 0$.

783. $y'' = \lambda y$; $y'(0) = 0$, $y'(l) = 0$.
784. $y'' = \lambda y$; $y(0) = 0$, $y'(l) = 0$.
785. $x^2 y'' = \lambda y$; $y(1) = 0$, $y(a) = 0$.

§ 14. Systèmes linéaires à coefficients constants

1. D'une façon générale, un système peut se ramener, par élimination des inconnues, à une équation d'ordre supérieur à une fonction inconnue (cf. [1], chapitre VII, § 1, point 2 ou [4], chapitre 3, § 2). Ce procédé n'est commode que pour la résolution des systèmes relativement simples.

E x e m p l e. Résoudre le système $\dot{x} = y + 1$, $\dot{y} = 2e^t - x$ Eliminons y. De la première équation l'on a $y = \dot{x} - 1$ Portant cette expression dans la deuxième équation, on obtient $\ddot{x} = 2e^t - x$. Résolvant cette équation du second ordre (par les méthodes du § 11), on trouve $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + e^t$. Donc, $y = \dot{x} - 1 = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + e^t - 1$.

2. Pour résoudre le système $\left(\text{où } \dot{x} \text{ signifie } \frac{dx}{dt}\right)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \qquad (1)$$

ou, en notation vectorielle, $\dot{x} = Ax$, x étant le vecteur et A la matrice:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix},$$

il convient de trouver les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

A chaque racine simple λ_i de l'équation caractéristique correspond une solution $C_i v^i e^{\lambda_i t}$, où C_i est une constante arbitraire, v^i le vecteur propre de la matrice A correspondant à λ_i.

Si pour la racine multiple λ il existe autant de vecteurs propres $v^1, \ldots, v^k$ linéairement indépendants qu'est sa multiplicité, alors il lui correspond la solution $C_1 v^1 e^{\lambda t} + \ldots + C_k v^k e^{\lambda t}$.

Si pour la racine λ de multiplicité k il n'existe que m vecteurs propres linéairement indépendants et que $m < k$, il est donc possible de chercher la solution, correspondant à ce λ, sous forme du produit d'un polynôme de degré $k - m$ par $e^{\lambda t}$, c'est-à-dire sous la forme *)

$$\begin{cases} x_1 = (a + bt + \ldots + dt^{k-m})\, e^{\lambda t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = (p + qt + \ldots + st^{k-m})\, e^{\lambda t}. \end{cases} \tag{3}$$

Pour déterminer les coefficients $a, b, \ldots, s$, il faut porter la solution (3) dans le système (1). Egalant les coefficients des termes semblables dans les deux membres des équations, on obtient un système d'équations linéaires algébriques par rapport à $a, b, \ldots$ $\ldots, s$. On cherche ensuite la solution générale du système. Les coefficients $a, b, \ldots, s$ doivent dépendre des k constantes arbitraires, où k est la multiplicité de la racine λ.

En obtenant pour chaque λ les solutions de la forme indiquée, puis en les additionnant, on trouve la solution générale du système (1).

E x e m p l e. Résoudre le système

$$\dot{x} = 2x + y + z, \quad \dot{y} = -2x - z, \quad \dot{z} = 2x + y + 2z. \tag{4}$$

Formons et résolvons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0, \ \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Trouvons pour la racine simple $\lambda_1 = 2$ le vecteur propre (α, β, γ) en résolvant le système

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0, \\ -2\alpha - 2\beta - \gamma = 0, \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \tag{6}$$

(les coefficients de ce système sont égaux aux éléments du déterminant de (5) pour $\lambda = 2$). De (6) on déduit $2\alpha = -\beta = \gamma$. Il en résulte que le vecteur $(1, -2, 2)$ est propre et que

$$x = e^{2t}, \quad y = -2e^{2t}, \quad z = 2e^{2t} \tag{7}$$

est solution particulière du système (4).

*) Lorsque $k \leqslant 3$, il est impossible de réduire le nombre $k - m$, alors que pour $k \geqslant 4$ sa réduction devient parfois possible, si l'on connaît la forme de Jordan de la matrice A.

Pour la racine multiple $\lambda = 1$ définissons d'abord la quantité de vecteurs propres linéairement indépendants. Pour $\lambda = 1$ on tire de (5) la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son ordre est $n = 3$, son rang $r = 2$. La quantité de vecteurs propres linéairement indépendants est $m = n - r = 1$. La racine $\lambda = 1$ est de multiplicité $k = 2$. Comme $k > m$, on cherche la solution sous forme du produit d'un polynôme de degré $k - m = 1$ par $e^{\lambda t}$, c'est-à-dire sous la forme

$$x = (a + bt)\, e^t, \; y = (c + dt)\, e^t, \; z = (f + gt)\, e^t. \tag{8}$$

Pour trouver les coefficients $a, b, \ldots$, portons (8) dans le système (4) et égalons les coefficients des termes semblables. On aboutit donc au système

$$\begin{aligned} b + d + g &= 0, & b &= a + c + f, \\ -2b - d - g &= 0, & d &= -2a - c - f, \\ 2b + d + g &= 0, & g &= 2a + c + f. \end{aligned} \tag{9}$$

Cherchons la solution générale de ce système. De deux équations de gauche on a $b = 0$, $g = -d$. Portant ceci dans les autres équations, on trouve

$$0 = a + c + f, \quad d = -2a - c - f \tag{10}$$

(les autres équations se déduisent de celles-ci). Résolvons le système (10) par rapport à a et f par exemple ; il vient :

$$a = -d, \quad f = d - c.$$

Ainsi, toutes les inconnues s'expriment par c et d. Posant $c = C_1$, $d = C_2$, on aura $a = -C_2$, $b = 0$, $f = C_2 - C_1$, $g = -C_2$. La solution générale du système (9) est donc trouvée.

Portant dans (8) les valeurs obtenues de $a, b, \ldots$ et ajoutant la solution particulière (7), multipliée par C_3, on obtient la solution générale du système (4):

$$x = -C_2 e^t + C_3 e^{2t}, \quad y = (C_1 + C_2 t)\, e^t - 2C_3 e^{2t},$$
$$z = (C_2 - C_1 - C_2 t)\, e^t + 2C_3 e^{2t}.$$

3. Considérons une autre méthode de résolution du système (1). Pour toute matrice il existe une base dans laquelle elle a la forme de Jordan. A chaque bloc d'ordre $p \geqslant 1$ de la forme de Jordan correspond une série de vecteurs de base $h_1, h_2, \ldots, h_p$

vérifiant les équations

$$
\begin{aligned}
&Ah_1 = \lambda h_1, \qquad h_1 \neq 0,\\
&Ah_2 = \lambda h_2 + h_1,\\
&Ah_3 = \lambda h_3 + h_2,\\
&\dots\dots\dots\\
&Ah_p = \lambda h_p + h_{p-1};
\end{aligned} \tag{11}
$$

h_1 est dit vecteur propre, $h_2, h_3, \ldots, h_p$ sont des vecteurs associés. A chaque série de vecteurs $h_1, h_2, \ldots, h_p$ correspondent p solutions linéairement indépendantes $x^1, x^2, \ldots, x^p$ du système $\dot{x} = Ax$ (l'indice supérieur étant le numéro de la solution):

$$
\begin{aligned}
&x^1 = e^{\lambda t} h_1,\\
&x^2 = e^{\lambda t}\left(\frac{t}{1!}h_1 + h_2\right),\\
&x^3 = e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!}h_1 + \frac{t}{1!}h_2 + h_3\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x^p = e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}h_1 + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}h_2 + \ldots + \frac{t}{1!}h_{p-1} + h_p\right).
\end{aligned} \tag{12}
$$

Le nombre de toutes ces solutions est égal à la somme des ordres de tous les blocs de la forme de Jordan, c'est-à-dire à l'ordre de la matrice. Elles constituent un système fondamental de solutions du système $\dot{x} = Ax$.

R è g l e d e m é m o r i s a t i o n d e s f o r m u l e s (12). Au vecteur propre h_1 correspond la solution $x^1 = e^{\lambda t}h_1$. Si l'on élimine partout $e^{\lambda t}$, alors chaque ligne du second membre de (12) sera obtenue par intégration en t de la ligne précédente, la constante d'intégration étant égale au vecteur suivant, dans l'ordre de leur succession.

4. S'il existe des racines complexes λ, les méthodes mentionnées donnent l'expression des solutions par l'intermédiaire de fonctions complexes. Si, dans ce cas, les coefficients du système (1) sont réels, la solution peut s'exprimer uniquement par des fonctions réelles. A cet effet, il convient d'utiliser le fait que les parties réelle et imaginaire de la solution complexe correspondant à la racine $\lambda = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$ sont des solutions linéairement indépendantes.

E x e m p l e. Résoudre le système $\dot{x} = 4x - y$, $\dot{y} = 5x + 2y$. Formons et résolvons l'équation caractéristique

$$
\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0, \quad \lambda = 3 \pm 2i.
$$

Trouvons le vecteur propre (a, b) associé à la racine $\lambda = 3 + 2i$:

$$\begin{cases} (1-2i)\ a - \ b = 0, \\ \ 5a - (1+2i)\ b = 0. \end{cases}$$

On peut poser $a = 1$, $b = 1 - 2i$ et en tirer la solution particulière $x = e^{(3+2i)t}$, $y = (1 - 2i)\ e^{(3+2i)t}$.

Comme le système donné est à coefficients réels, on n'a pas besoin de chercher la solution correspondant à la racine $\lambda = 3 - 2i$ qui est le conjugué complexe de la solution obtenue. Pour obtenir deux solutions réelles il faut prendre les parties réelle et imaginaire de la solution complexe trouvée. Comme $e^{(3+2i)t} = e^{3t}$ (cos $2t +$ $+ i \sin 2t$), il vient donc

$$\begin{cases} x_1 = \operatorname{Re} e^{(3+2i)t} = e^{3t} \cos 2t, \\ y_1 = \operatorname{Re} (1-2i)\ e^{(3+2i)t} = e^{3t} (\cos 2t + 2 \sin 2t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \operatorname{Im} e^{(3+2i)t} = e^{3t} \sin 2t, \\ y_2 = \operatorname{Im} (1-2i)\ e^{(3+2i)t} = e^{3t} (\sin 2t - 2 \cos 2t). \end{cases}$$

La solution générale s'exprime au moyen des deux solutions linéairement indépendantes obtenues:

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 = C_1e^{3t} \cos 2t + C_2e^{3t} \sin 2t,$$
$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{3t} (\cos 2t + 2 \sin 2t) + C_2e^{3t} (\sin 2t - 2 \cos 2t).$$

5. Pour résoudre le système

$$\begin{cases} a_{10}x^{(n)} + a_{11}x^{(n-1)} + \ldots + a_{1n}x + b_{10}y^{(n)} + b_{11}y^{(n-1)} + \ldots + b_{1n}y = 0, \\ a_{20}x^{(n)} + a_{21}x^{(n-1)} + \ldots + a_{2n}x + b_{20}y^{(n)} + b_{21}y^{(n-1)} + \ldots + b_{2n}y = 0, \end{cases}$$

non ramené à une forme normale, établissons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{10}\lambda^n + a_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{1n} & b_{10}\lambda^n + b_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{1n} \\ a_{20}\lambda^n + a_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{2n} & b_{20}\lambda^n + b_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{2n} \end{vmatrix} = 0$$

et trouvons ses racines. La solution est ensuite cherchée par la méthode du point 2.

La résolution des systèmes de trois équations et plus est analogue.

6. On peut définir une solution particulière du système non homogène et linéaire à coefficients constants

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

par la méthode des coefficients indéterminés dans le cas où les fonctions $f_i(t)$ sont des sommes et des produits des fonctions $b_0 + b_1t + \ldots + b_mt^m$, $e^{\alpha t}$, $\cos \beta t$, $\sin \beta t$. On procède comme

pour une équation linéaire à coefficients constants (cf. § 11, point 2) à la seule différence suivante. Si $f_i(t) = P_{m_i}(t)\, e^{\gamma t}$, où $P_{m_i}(t)$ est un polynôme de degré m_i, on cherche une solution particulière du système (13) non pas sous la forme $t^s Q_m(t)\, e^{\gamma t}$, mais

$$x_i = Q^i_{m+s}(t)\, e^{\gamma t}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

où $Q^i_{m+s}(t)$ sont des polynômes de degré $m + s$ à coefficients inconnus, $m = \max m_i$; $s = 0$ si γ n'est pas racine de l'équation caractéristique (2), sinon s peut être pris égal à la multiplicité de cette racine (ou, plus exactement, s est d'une unité plus grand que le degré supérieur des polynômes qui dans la solution générale du système homogène sont multipliés par $e^{\gamma t}$). Les coefficients inconnus des polynômes se déterminent par introduction des expressions (14) dans le système (13) et par identification des coefficients des termes semblables.

Les polynômes se déterminent de façon analogue même si les $f_i(t)$ contiennent $e^{\alpha t}\cos\beta t$ et $e^{\alpha t}\sin\beta t$ et que le nombre $\gamma = \alpha + \beta i$ soit racine de l'équation caractéristique.

E x e m p l e. Résoudre le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + e^{3t}(t + \sin t), \\ \dot{y} = x + 2y + te^{3t}\cos t. \end{cases} \tag{15}$$

Trouvons en premier lieu, pour le système homogène $\dot{x} = 4x - y$, $\dot{y} = x + 2y$, les racines $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ et cherchons, tout comme au point 2, la solution générale

$$x_0 = (C_1 t + C_2)\, e^{3t}, \quad y_0 = (C_1 t + C_2 - C_1)\, e^{3t}.$$

Pour les fonctions te^{3t}, $e^{3t}\sin t$, $te^{3t}\cos t$ du système (15) les nombres $\alpha + \beta i$ sont respectivement égaux à 3, $3 + i$, $3 + i$. Aussi faut-il trouver séparément les solutions particulières des systèmes

$$\dot{x} = 4x - y + te^{3t}, \quad \dot{y} = x + 2y, \tag{16}$$

$$\dot{x} = 4x - y + e^{3t}\sin t, \quad \dot{y} = x + 2y + te^{3t}\cos t. \tag{17}$$

Pour le système (16), $\alpha + \beta i = 3 = \lambda_1 = \lambda_2$, $s = 2$, $m = 1$. En vertu de (14), une solution particulière peut être cherchée sous la forme

$$x_1 = (at^3 + bt^2 + ct + d)\, e^{3t}, \quad y_1 = (ft^3 + gt^2 + ht + j)\, e^{3t}.$$

Pour le système (17) on a $\alpha + \beta i = 3 + i \neq \lambda_{1,2}$, $s = 0$, $m = 1$. Une solution particulière s'écrit donc

$$x_2 = (kt + l)\, e^{3t}\sin t + (mt + n)\, e^{3t}\cos t,$$
$$y_2 = (pt + q)\, e^{3t}\sin t + (rt + s)\, e^{3t}\cos t.$$

Les valeurs des coefficients a, b, . . . une fois obtenues, écrivons la solution générale du système (15) comme suit:

$$x = x_0 + x_1 + x_2, \quad y = y_0 + y_1 + y_2.$$

7. La solution du système non homogène

$$\dot{x}_i = a_{i1}(t)\, x_1 + \ldots + a_{in}(t)\, x_n + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n$$

peut se retrouver par la méthode de variation des constantes, si l'on connaît la solution générale du système homogène aux mêmes coefficients $a_{ik}(t)$. Il faut, à cet effet, remplacer les constantes arbitraires C_i par les fonctions inconnues $C_i(t)$ dans la formule de la solution générale du système homogène. Les expressions obtenues pour x_i sont à porter dans le système non homogène donné d'où l'on tire les $C_i(t)$.

8. La somme de la série

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots, \tag{18}$$

où E est la matrice unité, est appelée fonction exponentielle e^A de la matrice A. La série est convergente pour toute matrice A.

Les propriétés de e^A sont les suivantes:

a) si $A = CMC^{-1}$, alors $e^A = Ce^M C^{-1}$;

b) si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$;

c) la matrice $X(t) = e^{tA}$ vérifie l'équation $\frac{dX}{dt} = AX$; $X(0) = E$.

Méthodes de recherche de e^A:

1) Par résolution d'un système d'équations différentielles. En vertu de la propriété c), la i-ième colonne de la matrice e^{tA} est solution du système d'équations (en notation vectorielle) $\dot{x} = Ax$ vérifiant les conditions initiales $x_i = 1$, $x_k = 0$, pour $k \neq i$ (x_i est la i-ième coordonnée du vecteur x).

2) Par réduction de la matrice à la forme de Jordan. Soit donnée une matrice C telle que la matrice $C^{-1}AC$ ait la forme de Jordan, c'est-à-dire qu'elle se compose de blocs K_i. Chaque bloc de Jordan a la forme $K = \lambda E + F$, les éléments de la matrice F étant tous nuls, sauf ceux situés immédiatement au-dessus de la diagonale. Il en résulte que $F^m = 0$, où m est l'ordre de la matrice F, et il est facile de trouver e^F à l'aide de la série (18). De plus, comme $e^{\lambda E} = e^\lambda E$, on a

$$e^K = e^{\lambda E + F} = e^{\lambda E} \cdot e^F = e^\lambda E \cdot e^F = e^\lambda e^F.$$

En formant la matrice e^M avec les blocs e^{K_i}, on trouve e^A en se servant de la propriété a). (Pour les démonstrations et l'exemple voir [5], chapitre 1, §§ 12 à 14.)

Résoudre les systèmes d'équations suivants $\left(\dot{x}\text{ désigne } \frac{dx}{dt}\text{, etc.;}\right.$ la donnée des racines de l'équation caractéristique dans certains problèmes facilitera leur résolution $\left.\right)$:

786. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

787. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$

788. $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$

789. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

790. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

791. $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$

792. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$

793. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

794. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$

795. $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + y = 0. \end{cases}$

796. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1).$

797. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1).$

798. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3).$

799. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 5).$

800. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x, \\ \dot{y} = z + x, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1).$

801. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i).$

802. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = 2y + 3z - x \end{cases}$

$(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 3 \pm i).$

803. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm i).$

804. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 3)$.

805. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$

$(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$.

806. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$.

807. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y \end{cases}$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -5)$.

808. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2z - y \end{cases}$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2)$.

809. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$.

810. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 2y + 4z, \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 3)$.

811. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$.

812. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z \end{cases}$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2)$.

Résoudre les systèmes non ramenés à la forme normale :

813. $\begin{cases} \ddot{x} = 2x - 3y, \\ \ddot{y} = x - 2y. \end{cases}$

814. $\begin{cases} \ddot{x} = 3x + 4y, \\ \ddot{y} = -x - y. \end{cases}$

815. $\begin{cases} \ddot{x} = 2y, \\ \ddot{y} = -2x. \end{cases}$

816. $\begin{cases} \ddot{x} = 3x - y - z, \\ \ddot{y} = -x + 3y - z, \\ \ddot{z} = -x - y + 3z. \end{cases}$

817. $\begin{cases} 2\dot{x} - 5\dot{y} = 4y - x, \\ 3\dot{x} - 4\dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

818. $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0. \end{cases}$

819. $\begin{cases} \ddot{x} - 2\ddot{y} + \dot{y} + x - 3y = 0, \\ 4\ddot{y} - 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x + 5y = 0. \end{cases}$

820. $\begin{cases} \ddot{x} - x + 2\ddot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - x + \dot{y} + y = 0. \end{cases}$

821. $\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} + 2x = 0, \\ 3\dot{x} + \ddot{y} - 8y = 0. \end{cases}$

822. $\begin{cases} \ddot{x} + 3\ddot{y} - x = 0, \\ \dot{x} + 3\dot{y} - 2y = 0. \end{cases}$

823. $\begin{cases} \ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y = 0, \\ 3\ddot{x} + 5x + \dot{y} + 3y = 0. \end{cases}$

824. $\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} - 2x - 2\dot{y} - y = 0, \\ \ddot{x} - 4\dot{x} - \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0. \end{cases}$

825. $\begin{cases} 2\ddot{x} + 2\dot{x} + x + 3\ddot{y} + \dot{y} + y = 0, \\ \ddot{x} + 4\dot{x} - x + 3\ddot{y} + 2\dot{y} - y = 0. \end{cases}$

Résoudre les systèmes linéaires non homogènes:

826. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$

827. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

828. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

829. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

830. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$

831. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

832. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

833. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t, \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$

834. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x - 5\sin t. \end{cases}$

835. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t. \end{cases}$

836. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$

837. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

838. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8, \\ \dot{y} = 3x + 6y. \end{cases}$

839. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

840. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

841. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$

842. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$ 843. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

844. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$ 845. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$

Résoudre les systèmes donnés par la méthode de variation des constantes :

846. $\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$ 847. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$

848. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$ 849. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

850. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$

Résoudre les systèmes ci-dessous écrits sous forme vectorielle: $\dot{x} = Ax$, où x est un vecteur et A une matrice donnée :

851. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$ 852. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

853. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$ 854. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

855. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

856. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$

857. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

858. $\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

859. $\dot{x} = Ax,\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

860. $\dot{x} = Ax,\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

861. $\dot{x} = Ax,\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$ $x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$

862. $\dot{x} = Ax,\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

863. $\dot{x} = Ax,\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

864. $\dot{x} = Ax,\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

865. $\dot{x} = Ax,\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

866. $\dot{x} = Ax,\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

Trouver la fonction exponentielle e^A de la matrice donnée A :

867. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$ **868.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$ **869.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

870. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$ **871.** $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

872. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$ **873.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Trouver det e^A sans calculer la matrice e^A :

874. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 875. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

876. Un corps de masse m, qui se déplace dans un plan x, y, est attiré par le point (0, 0) avec une force a^2mr, où r est la distance à ce point. Déterminer le mouvement du corps avec les conditions initiales $x(0) = d$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v$ ainsi que sa trajectoire.

877. Un poids de masse $3m$ suspendu à une extrémité d'un ressort dont l'autre est fixée au point 0, est relié à un autre ressort portant un second poids de masse $2m$. Les deux charges se déplacent sans frottement sur une droite passant par le point 0. Sous l'action d'une force a^2mx, chacun des ressorts s'allonge d'une grandeur x. Trouver les mouvements périodiques éventuels du système.

878. Deux poulies dont les moments d'inertie sont I_1 et I_2 sont fixées aux extrémités d'un arbre. Toute rotation d'une poulie d'un angle φ par rapport à l'autre fait apparaître, par suite de la déformation de l'arbre, des forces élastiques dont le couple de torsion est $K\varphi$. Trouver la fréquence des oscillations de torsion de l'arbre en l'absence de forces extérieures.

879. Une résistance R est branchée en série à une source de courant de tension $E = V \sin \omega t$. Les branches parallèles du circuit contiennent une inductance L et une capacité C (fig. 4).

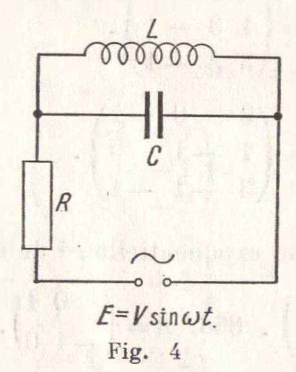


Fig. 4

Trouver l'intensité du courant dans le circuit (en régime stationnaire) traversant la résistance R. On demande de trouver encore la valeur de la pulsation ω pour laquelle l'intensité du courant est maximale, puis minimale.

I n d i c a t i o n. Pour la formation des équations différentielles dans les problèmes sur les circuits électriques, cf. § 11, point 5.

880*. Quelle condition doivent vérifier les valeurs propres de la matrice A pour que le système d'équations (en écriture vectorielle) $\dot{x} = Ax + f(t)$ admette une solution périodique de période ω pour tout vecteur fonction continue $f(t)$?

Indication. Appliquer la méthode de la variation des constantes sous forme vectorielle pour exprimer la solution générale en fonction de la matrice fondamentale e^{tA}, de $f(t)$ et des conditions initiales. Utiliser la condition de périodicité.

§ 15. Stabilité

1. Considérons le système d'équations

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

ou, en notation vectorielle,

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Supposons que toutes les f_i et $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ sont continues pour $t_0 \leqslant t < \infty$.

La solution $x = \varphi(t)$ du système (2) est dite stable au sens de Liapounov, si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour toute solution $x(t)$ de ce système dont la valeur initiale satisfait l'inégalité

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta, \tag{3}$$

l'on ait

$$|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

pour tous les $t \geqslant t_0$.

Si, d'autre part, pour un certain $\varepsilon > 0$, un tel δ n'existe pas, la solution $\varphi(t)$ est instable.

La solution $\varphi(t)$ est appelée asymptotiquement stable lorsqu'elle est stable au sens de Liapounov et que, en outre, toutes les solutions vérifiant les conditions initiales suffisamment voisines tendent indéfiniment vers $\varphi(t)$ pour $t \to +\infty$, c'est-à-dire lorsque l'inégalité (3) entraîne $x(t) - \varphi(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$.

La stabilité ne dépend pas du choix de t_0.

La question de savoir si une solution donnée $x = \varphi(t)$ du système (2) est stable se ramène à celle de la stabilité de la solution nulle $y(t) \equiv 0$ d'un autre système déduit du système (2) par la substitution de la fonction cherchée $x - \varphi(t) = y$.

2. Etude de la stabilité en première approximation. Soit $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ une solution du système (1). Afin d'étudier sa stabilité, il importe de

mettre en évidence la partie linéaire des fonctions f_i au voisinage du point $x_1 = \ldots = x_n = 0$, d'après la formule de Taylor par exemple. Le système obtenu peut être étudié à l'aide du théorème suivant.

Théorème de Liapounov. *Considérons le système*

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + \psi_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

où a_{ik} sont des constantes et ψ_i des infiniment petits d'ordre supérieur à 1, plus précisément, pour $|x| < \varepsilon_0$ on a

$$|\psi_i| \leqslant \gamma(x)|x|, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \gamma(x) \to 0 \quad pour \quad |x| \to 0, \tag{5}$$

où $|x| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$.

Alors, si toutes les valeurs propres de la matrice (a_{ik}), $i, k = 1, \ldots, n$, possèdent des parties réelles négatives, la solution nulle du système (4) est asymptotiquement stable; si au moins une valeur propre possède une partie réelle positive, la solution nulle est instable.

Exemple. Etudier la stabilité de la solution nulle du système

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{4 + 4y} - 2e^{x+y}, \\ \dot{y} = \sin ax + \ln(1 - 4y), \quad a = \text{const.} \end{cases}$$

En mettant en évidence d'après la formule de Taylor la partie linéaire des fonctions, on obtient

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + \psi_1(x, y), \\ \dot{y} = ax - 4y + \psi_2(x, y), \end{cases}$$

où les fonctions ψ_1 et ψ_2 sont égales à $O(x^2 + y^2)$ et, par ailleurs, satisfont à la condition (5). On trouve les valeurs propres de la matrice des coefficients:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ a & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 6\lambda + 8 + a = 0, \quad \lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1-a}.$$

Pour $a > 1$, les racines sont complexes, $\text{Re}\,\lambda_{1,2} = -3 < 0$, alors que pour $-8 < a \leqslant 1$ elles sont réelles négatives, donc la solution nulle dans ce cas est asymptotiquement stable.

Pour $a < -8$, une racine est positive, donc la solution nulle est instable.

Lorsque $a = -8$, on a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -6$ et la question de stabilité ne se résout pas au moyen du théorème proposé.

3. Etude de la stabilité à l'aide de fonctions de Liapounov. On appelle dérivée de la fonction

$v(t, x_1, \ldots, x_n)$, en vertu du système (1), la fonction

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n,$$

où $f_1, \ldots, f_n$ sont les seconds membres du système (1).

Théorème de Liapounov. *S'il existe une fonction dérivable $v(x_1, \ldots, x_n)$ satisfaisant dans le domaine $|x| < \varepsilon_0$ aux conditions:*

1) $v > 0$ *pour* $x \neq 0$, $v(0) = 0$,

2) $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} \leqslant 0$ *pour* $|x| < \varepsilon_0$, $t > t_0$,

la solution nulle du système (1) *est donc stable au sens de Liapounov.*

Si, au lieu de la condition 2), *est remplie une condition plus forte*

3) $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} \leqslant -w(x) < 0$ *pour* $0 < |x| < \varepsilon_0$, $t > t_0$,

et que la fonction $w(x)$ soit continue pour $|x| < \varepsilon_0$, la solution nulle du système (1) *est asymptotiquement stable.*

Théorème de Tchétaev. *Admettons que le système* (1) *possède une solution nulle, qu'il existe dans un certain domaine V de l'espace $x_1, \ldots, x_n$ une fonction dérivable $v(x_1, \ldots, x_n)$ et que:*

1) *le point $x = 0$ appartienne à la frontière du domaine V,*

2) *$v = 0$ sur la frontière du domaine V pour $|x| < \varepsilon_0$,*

3) *dans le domaine V, pour $t > t_0$, on ait $v > 0$, $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} \geqslant w(x) > 0$, $w(x)$ étant une fonction continue.*

Alors la solution nulle du système (1) *est instable.*

Il n'existe pas de méthode générale de formation de la fonction v de Liapounov (quand la solution du système (1) est inconnue). Dans certains cas, on parvient à la construire sous une forme quadratique $v = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j$ ou encore comme la somme d'une forme quadratique et d'intégrales des fonctions non linéaires figurant au second membre du système considéré.

4. Conditions de négativité de toutes les parties réelles des racines de l'équation

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad a_0 > 0, \tag{6}$$

à coefficients réels:

a) Condition nécessaire: *tous les $a_i > 0$.* Pour $n \leqslant 2$, cette condition est suffisante.

b) Conditions de Routh-Hurwitz: *il faut et il suffit que tous les principaux mineurs diagonaux de la matrice de*

Hurwitz soient positifs:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont donc les éléments diagonaux de cette matrice. L'indice de chaque nombre, dans chaque ligne, est de l'unité inférieur à celui du nombre précédent. Les nombres a_i d'indice $i > n$ ou $i < 0$ sont remplacés par des zéros.

Les principaux mineurs diagonaux de la matrice de Hurwitz sont:

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\ \ldots \qquad (7)$$

c) C o n d i t i o n s d e L i e n n a r d - C h i p a r d. *Il faut et il suffit que tous les* $a_i > 0$ *et que* $\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \Delta_{n-5} > 0, \ldots$, *où* Δ_i *sont les mêmes que dans* (7).

Ces conditions sont équivalentes à celles de Routh-Hurwitz, toutefois elles sont plus commodes car elles contiennent moins de déterminants.

E x e m p l e. Pour quelles valeurs de a et b les parties réelles des racines de l'équation $\lambda^4 + 2\lambda^3 + a\lambda^2 + 3\lambda + b = 0$ sont-elles négatives?

Ecrivons les conditions de Liennard-Chipard:

$$a > 0,\ b > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & 2 \\ 0 & b & 3 \end{vmatrix} = 6a - 4b - 9 > 0,\quad \Delta_1 = 2 > 0.$$

On en déduit les conditions $b > 0,\ 6a > 4b + 9$.

d) C r i t è r e d e M i k h a ï l o v. *Il faut et il suffit que dans le plan complexe le point* $f(i\omega)$, *où* $f(\lambda)$ *est le premier membre de* (6), *lorsque* ω *varie de* 0 *à* $+\infty$, *ne passe pas par l'origine des coordonnées, mais tourne autour d'elle d'un angle* $n\pi/2$ *dans le sens positif*.

Une autre formulation (équivalente) du critère de Mikhaïlov: *il faut et il suffit que* $a_n a_{n-1} > 0$ *et que les racines des polynômes*

$$p(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \ldots,$$
$$q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \ldots$$

soient toutes positives, distinctes et alternantes à partir de la racine ξ_1, *c'est-à-dire que*

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \ldots$$

(Notons que le polynôme (6), pour $\lambda = i\omega$, est égal à $p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2)$.)

Exemple. $f(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + 7\lambda^3 + 8\lambda^2 + 10\lambda + 6$. On a ici $a_n = 6 > 0$, $a_{n-1} = 10 > 0$, et les polynômes $p(\xi) = 6 - 8\xi + 2\xi^2$, $q(\eta) = 10 - 7\eta + \eta^2$ ont pour racines $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 3$, $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 5$. Donc, $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2$. En vertu du critère de Mikhaïlov, les parties réelles de toutes les racines du polynôme $f(\lambda)$ sont négatives.

5. Les conditions de stabilité de la solution nulle d'un système linéaire à coefficients périodiques sont données au [5], chapitre III, § 16.

Pour les problèmes ci-dessous se servir de la définition de la stabilité.

881. En appliquant la définition de la stabilité au sens de Liapounov, dire si les solutions des équations vérifiant les conditions initiales indiquées sont stables:

a) $3(t-1)\dot{x} = x$, $x(2) = 0$. b) $\dot{x} = 4x - t^2 x$, $x(0) = 0$.

c) $\dot{x} = t - x$, $x(0) = 1$. d) $2t\dot{x} = x - x^3$, $x(0) = 0$.

Tracer dans le plan x, y les trajectoires des systèmes donnés au voisinage du point (0, 0) et établir graphiquement la stabilité de la solution nulle:

882. $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -2y$. **883.** $\dot{x} = x$, $\dot{y} = 2y$.

884. $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = y$. **885.** $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = 2x^3$.

886. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\sin x$. **887.** $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x^3(1 + y^2)$.

888. $\dot{x} = -y \cos x$, $\dot{y} = \sin x$.

889. Les trajectoires du système d'équations $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$, les fonctions P, P'_x, P'_y, Q, Q'_x, Q'_y étant continues, sont représentées dans un plan des phases (fig. 5). Que peut-on dire du comportement des solutions, quand $t \to +\infty$? La solution nulle, est-elle asymptotiquement stable? Est-elle stable au sens de Liapounov?

Etablir si la solution nulle du système est stable, sachant que la solution générale du système est de la forme:

890. $x = C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t}, \qquad y = C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2.$

891. $x = \frac{C_1 - C_2 t}{1+t^2}, \qquad y = (C_1 t^3 + C_2) e^{-t}.$

892. $x = (C_1 - C_2 t) e^{-t}, \qquad y = \frac{C_1 \sqrt[3]{t}}{\ln (t^2+2)} + C_2.$

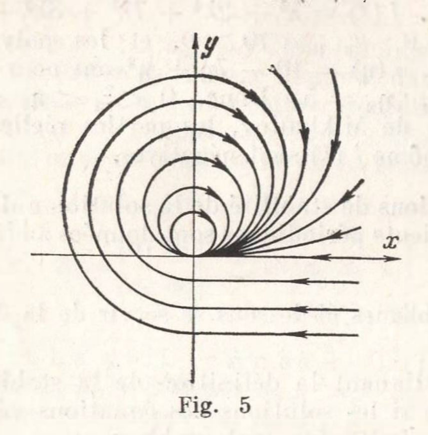


Fig. 5

893. Démontrer que pour la stabilité au sens de Liapounov de la solution nulle de l'équation $\frac{dx}{dt} = a(t) x$ (où la fonction $a(t)$ est continue) il faut et il suffit que

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \int_0^t a(s) \, ds < +\infty.$$

894. Démontrer que, si une solution quelconque d'un système linéaire d'équations différentielles est stable au sens de Liapounov, toutes les solutions de ce système le sont également.

895. Démontrer que, si chaque solution d'un système linéaire homogène reste bornée pour $t \to +\infty$, la solution nulle est stable au sens de Liapounov.

896. Démontrer que, si chaque solution d'un système linéaire homogène tend vers zéro pour $t \to +\infty$, la solution nulle est asymptotiquement stable.

897. Démontrer que, si un système linéaire homogène possède au moins une solution non bornée pour $t \to +\infty$, la solution nulle est instable.

898. On demande d'établir si la solution nulle du système $\dot{x}_1 = a_{11}(t) x_1 + a_{12}(t) x_2$, $\dot{x}_2 = a_{21}(t) x_1 + a_{22}(t) x_2$ est stable, sachant que $a_{11}(t) + a_{22}(t) \to b > 0$ pour $t \to +\infty$.

En appliquant le théorème de Liapounov de la stabilité en première approximation, établir la stabilité de la solution nulle :

899. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y, \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$

900. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$

901. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases}$

902. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}. \end{cases}$

903. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x), \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8+12y}. \end{cases}$

904. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y - x), \\ \dot{y} = 2^y - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$

905. $\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(z - y) - 2x, \\ \dot{y} = \sqrt{9+12x} - 3e^y, \\ \dot{z} = -3y. \end{cases}$

906. $\begin{cases} \dot{x} = e^x - e^{-3z}, \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x+y), \\ \dot{z} = \ln(1 + z - 3x). \end{cases}$

Trouver les valeurs des paramètres a et b pour lesquelles la solution nulle est asymptotiquement stable :

907. $\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$

908. $\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$

909. $\begin{cases} \dot{x} = x + ay + y^2, \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2. \end{cases}$

910. $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases}$

911. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^{-x} - \sqrt{4+ay}, \\ \dot{y} = \ln(1 + 9x + ay). \end{cases}$

912. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(e + ax) - e^y, \\ \dot{y} = bx + \operatorname{tg} y. \end{cases}$

913. Etudier la stabilité de la solution $x = -t^2$, $y = t$ du système

$$\dot{x} = y^2 - 2ty - 2y - x, \quad \dot{y} = 2x + 2t^2 + e^{2t-2y}.$$

914. Etablir si la solution $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ du système

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(x + 2\sin^2\frac{t}{2}\right) - \frac{y}{2}, \\ \dot{y} = (4 - x^2)\cos t - 2x\sin^2 t - \cos^3 t \end{cases}$$

est stable.

On demande de trouver toutes les positions d'équilibre des systèmes donnés et d'étudier leur stabilité :

915. $\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y. \end{cases}$

916. $\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$

917. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin(x+y). \end{cases}$

918. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x), \\ \dot{y} = x - y - 1. \end{cases}$

919. $\begin{cases} \dot{x} = 3 - \sqrt{4 + x^2 + y}, \\ \dot{y} = \ln(x^2 - 3). \end{cases}$

920. $\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{cases}$

921. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + y + \sin x), \\ \dot{y} = 2 + \sqrt[3]{3\sin x - 8}. \end{cases}$

922. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin y, \\ \dot{y} = 2x + \sqrt{1 - 3x - \sin y}. \end{cases}$

Etudier la stabilité de la solution nulle en formant la fonction de Liapounov et en appliquant les théorèmes de Liapounov et de Tchétaev :

923. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$

924. $\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$

925. $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5, \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5. \end{cases}$

926. $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3, \\ \dot{y} = x^2 - y^3. \end{cases}$

927. $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases}$

928. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$

929. $\begin{cases} \dot{x} = -x - xy, \\ \dot{y} = y^3 - x^3. \end{cases}$

930. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - xy^2, \\ \dot{y} = 2x - y - y^3. \end{cases}$

931*. $\begin{cases} \dot{x} = -f_1(x) - f_2(y), \\ \dot{y} = f_3(x) - f_4(y). \end{cases}$

où sign $f_i(z)$ = sign z, $i = 1, 2, 3, 4$.

En appliquant les conditions connues de négativité des parties réelles de toutes les racines du polynôme, par exemple, les conditions de Routh-Hurwitz ou le critère de Mikhaïlov, étudier la stabilité de la solution nulle :

932. $y''' + y'' + y' + 2y = 0$.

933. $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0$.

934. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$.
935. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0$.
936. $y^{IV} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0$.
937. $y^{IV} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0$.
938. $y^{IV} + 13y''' + 16y'' + 55y' + 76y = 0$.
939. $y^{IV} + 3y''' + 26y'' + 74y' + 85y = 0$.
940. $y^{IV} + 3{,}1y''' + 5{,}2y'' + 9{,}8y' + 5{,}8y = 0$.
941. $y^{V} + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0$.
942. $y^{V} + 2y^{IV} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 2y = 0$.
943. $y^{V} + 3y^{IV} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0$.
944. $y^{V} + 4y^{IV} + 9y''' + 16y'' + 19y' + 13y = 0$.
945. $y^{V} + 4y^{IV} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0$.
946. $y^{V} + 3y^{IV} + 10y''' + 22y'' + 23y' + 12y = 0$.
947. $y^{V} + 5y^{IV} + 15y''' + 48y'' + 44y' + 74y = 0$.
948. $y^{V} + 2y^{IV} + 14y''' + 36y'' + 23y' + 68y = 0$.

Trouver les valeurs des paramètres a et b pour lesquelles la solution nulle est asymptotiquement stable:

949. $y''' + ay'' + by' + 2y = 0$.
950. $y''' + 3y'' + ay' + by = 0$.
951. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + ay = 0$.
952. $y^{IV} + ay''' + y'' + 2y' + y = 0$.
953. $ay^{IV} + y''' + y'' + y' + by = 0$.
954. $y^{IV} + y''' + ay'' + y' + by = 0$.
955. $y^{IV} + ay''' + 4y'' + 2y' + by = 0$.
956. $y^{IV} + 2y''' + ay'' + by' + y = 0$.
957. $y^{IV} + ay''' + 4y'' + by' + y = 0$.
958. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + ay' + by = 0$.

Pour étudier la stabilité des équations à coefficiens périodiques dans les problèmes qui suivent, il convient de trouver la matrice de la monodromie et de calculer les multiplicateurs (cf. [5], chapitre III, §§ 15 et 16).

959. Etudier la stabilité de la solution nulle de l'équation

$$\ddot{x} + p(t)\,x = 0, \quad p(t) = a^2 \ (0 < t < \pi), \quad p(t) = b^2 (\pi < t < 2\pi),$$

$p(t + 2\pi) \equiv p(t)$, pour les valeurs suivantes des paramètres:

a) $a = 0{,}5,\ b = 0$; b) $a = 0{,}5,\ b = 1$;
c) $a = 0{,}5,\ b = 1{,}5$; d) $a = 0{,}75,\ b = 0$;
e) $a = 1,\ b = 0$; f) $a = 1,\ b = 1{,}5$.

960. On demande de trouver les valeurs des paramètres a et b pour lesquelles la solution nulle du système à coefficients périodiques

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A(t+2) \equiv A(t),$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ pour } 0 < t < 1, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ pour } 1 < t < 2$$

est stable.

§ 16. Points singuliers

1. On appelle point singulier du système

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{1}$$

ou de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \tag{2}$$

où les fonctions P et Q sont continûment différentiables, un point en lequel $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$.

2. Pour étudier le point singulier du système

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy \tag{3}$$

ou de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \tag{4}$$

il faut trouver les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Le point singulier est un nœud à deux tangentes (fig. 6, *a*) si les racines sont réelles, distinctes et de même signe ; un col (fig. 6, *b*) si les racines sont de signes contraires ; un foyer (fig. 6, *c*) si les racines sont complexes et à partie réelle non nulle ; un centre (6, *d*) si les racines sont imaginaires pures. Lorsque les racines sont égales et non nulles (c'est-à-dire $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$), le point singulier peut être un nœud dégénéré (à une tangente) (fig. 6, *e*) ou un nœud étoilé (fig. 6, *f*) ; notons que celui-ci n'a lieu que dans

le cas d'un système $\frac{dx}{dt} = ax$; $\frac{dy}{dt} = ay$ $\left(\text{ou d'une équation } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\right)$ alors que celui-là, dans tous les autres cas pour $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$.

Si, d'autre part, l'une ou les deux racines de l'équation (5) sont nulles, alors $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, et, par conséquent, il y a simplification de la fraction du second membre de l'équation (4). L'équation prend la forme $\frac{dy}{dx} = k$ et les solutions dans le plan (x, y) se représentent par des droites parallèles.

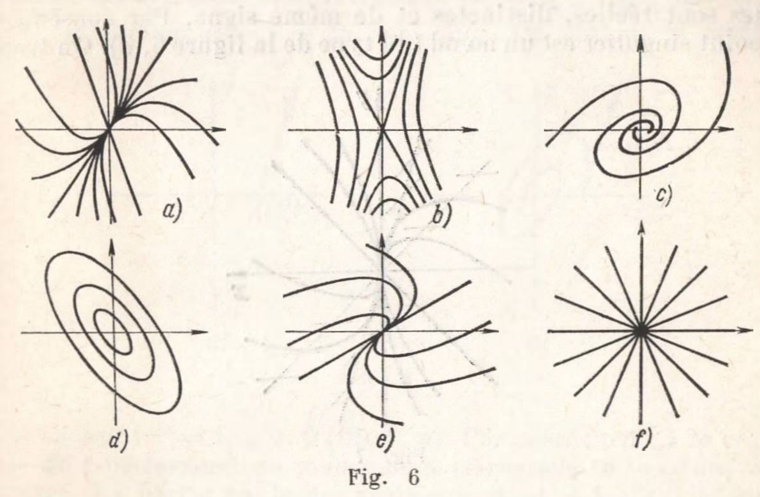


Fig. 6

Pour construire des courbes intégrales dans le plan, dans le cas d'un nœud, d'un col et d'un nœud dégénéré, il convient tout d'abord de trouver les solutions qui sont des droites passant par le point singulier. Ces droites sont toujours orientées le long des vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ des coefficients du système donné (3). Dans le cas d'un nœud, les courbes sont tangentes à la droite orientée le long du vecteur propre qui correspond à la plus p e t i t e valeur absolue de λ.

Dans le cas d'un foyer, il importe de déterminer le sens de rotation des courbes intégrales. Pour ce faire, on procède d'abord à l'étude de la stabilité de ce point d'après le signe de Re λ, ensuite on détermine la direction du mouvement sur les trajectoires autour du point singulier. Il suffit pour cela de construire en un point quelconque (x, y) le vecteur vitesse $\left(\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt}\right)$ qui se déduit des formules (3).

D'une manière analogue on étudie le sens de mouvement autour d'un nœud dégénéré.

E x e m p l e 1. Etudier le point singulier $x = 0$, $y = 0$ du système

$$\dot{x} = 2x, \quad \dot{y} = x + y. \qquad (6)$$

Cherchons les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2-\lambda)(1-\lambda) = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Elles sont réelles, distinctes et de même signe. Par conséquent, le point singulier est un nœud (du type de la figure 6, *a*). On trouve

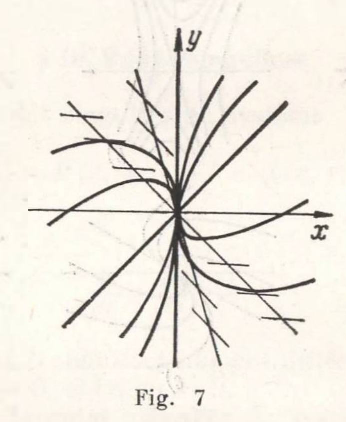


Fig. 7

pour $\lambda_1 = 1$ le vecteur propre (0, 1) et pour $\lambda_2 = 2$ le vecteur (1, 1). Dans le plan x, y, on trace des droites orientées dans le sens de ces vecteurs et des courbes tangentes à l'origine des coordonnées à la première des droites, puisque $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ (voir fig. 7.)

Considérons une autre méthode de construction des courbes intégrales. Divisant l'une des équations (6) par l'autre, on obtient l'équation de la forme (4):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{2x} \quad \left(\text{ou} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2x}{x+y} \right).$$

Cherchons les droites passant par le point singulier sous la forme $y = kx$ (et aussi $x = 0$). Portant dans les équations écrites, on trouve $k = 1$. Donc, $y = x$ et $x = 0$ sont les droites cherchées. La construction des autres courbes intégrales se fait à l'aide des isoclines (fig. 7).

E x e m p l e 2. Etuder le point singulier de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 3y}{x - 2y}. \qquad (7)$$

Cherchons les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^2+2\lambda+5=0; \quad \lambda = -1 \pm 2i.$$

Le point singulier est un foyer. Passons de l'équation (7) au système

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 4x - 3y. \tag{8}$$

Construisons au point (1, 0) le vecteur vitesse $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. En vertu de (8), le vecteur est $(x - 2y, 4x - 3y)$. On obtient le vecteur

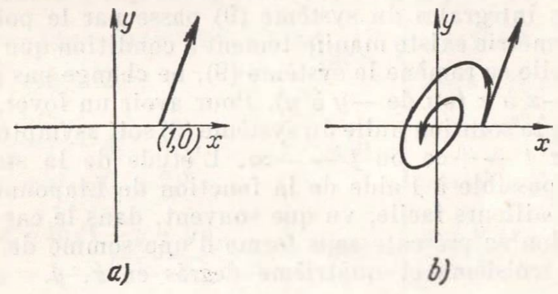


Fig. 8

(1, 4) au point $x = 1$, $y = 0$ (fig. 8, *a*). Par conséquent, à la croissance de t correspond un mouvement rétrograde le long des trajectoires. La partie réelle des racines λ étant $-1 < 0$, le point singulier est asymptotiquement stable et, par conséquent, avec croissance de t les solutions tendent indéfiniment vers le point singulier. Ainsi, dans ce mouvement rétrograde les courbes intégrales s'approchent de l'origine des coordonnées (fig. 8, *b*).

3. Pour étudier le point singulier du système plus général (1) ou de l'équation (2), il faut transporter l'origine de coordonnées au point singulier étudié et développer les fonctions P et Q au voisinage de ce point en série de Taylor en se limitant aux termes du premier ordre. Le système (1) prendra la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1 + by_1 + \varphi(x_1, y_1), \quad \frac{dy_1}{dt} = cx_1 + dy_1 + \psi(x_1, y_1), \tag{9}$$

où x_1, y_1 sont les coordonnées nouvelles (après le transfert) et a, b, c, d, des constantes. Supposons que pour un certain $\varepsilon > 0$

$$\frac{\varphi(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}} \to 0, \quad \frac{\psi(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}} \to 0 \text{ pour } x_1 \to 0, \ y_1 \to 0,$$

où $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Il est évident que cette condition est remplie (quel que soit $\varepsilon < 1$), si les fonctions P et Q au point étudié sont deux fois dérivables. Supposons encore que les parties réelles

de toutes les racines de l'équation caractéristique (5) soient différentes de zéro. Dans ce cas, le point singulier $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ du système (9) sera du même type que celui du système (3) obtenu de (9) en rejetant les fonctions φ et ψ. De plus, les coefficients angulaires des tangentes aux courbes intégrales en le point singulier sont les mêmes pour les systèmes (3) et (9) (toutefois, aux droites $y = kx$ du système (3) peuvent correspondre les courbes du système (9)); dans le cas d'un foyer le même est le sens de rotation des courbes intégrales.

Si le point singulier du système (3) est un centre, il peut être soit un centre, soit un foyer pour le système (9). Pour avoir un centre, il suffit (mais n'est pas nécessaire) que l'axe de symétrie des courbes intégrales du système (9) passe par le point étudié. L'axe de symétrie existe manifestement à condition que l'équation (2), à laquelle se ramène le système (9), ne change pas par substitution de $-x$ à x (ou de $-y$ à y). Pour avoir un foyer, il faut et il suffit que la solution nulle du système (9) soit asymptotiquement stable pour $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$. L'étude de la stabilité est également possible à l'aide de la fonction de Liapounov, ce qui n'est pas d'ailleurs facile, vu que souvent, dans le cas considéré, cette fonction se présente sous forme d'une somme de termes de deuxième, troisième et quatrième degrés en x, y.

Etudier les points singuliers des équations et systèmes ci-dessous et construire les courbes intégrales dans le plan (x, y):

961. $y' = \frac{2x+y}{3x+4y}$. **962.** $y' = \frac{x-4y}{2y-3x}$. **963.** $y' = \frac{y-2x}{y}$.

964. $y' = \frac{x+4y}{2x+3y}$. **965.** $y' = \frac{x-2y}{3x-4y}$. **966.** $y' = \frac{2x-y}{x-y}$.

967. $y' = \frac{y-2x}{2y-3x}$. **968.** $y' = \frac{4y-2x}{x+y}$.

969. $y' = \frac{y}{x}$. **970.** $y' = \frac{4x-y}{3x-2y}$.

971. $\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$ **972.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

973. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$ **974.** $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

975. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$ **976.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$

977. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4y - 6x. \end{cases}$ **978.** $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x, \\ \dot{y} = 2y - 4x. \end{cases}$

Trouver et étudier les points singuliers des équations et systèmes donnés:

979. $y' = \frac{2y - x}{3x + 6}$. 980. $y' = \frac{2x + y}{x - 2y - 5}$.

981. $y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}$. 982. $y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}$.

983. $y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}$. 984. $y' = \frac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}$.

985. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3. \end{cases}$ 986. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2), \\ \dot{y} = e^x - e^y. \end{cases}$

987. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$ 988. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y + 2} - 2, \\ \dot{y} = \operatorname{arc\,tg}(x^2 + xy). \end{cases}$

989. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = x^2 - (y - 2)^2. \end{cases}$ 990. $\begin{cases} \dot{x} = \ln \frac{y^2 - y + 1}{3}, \\ \dot{y} = x^2 - y^2. \end{cases}$

991. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y + y^2), \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases}$ 992. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2, \\ \dot{y} = e^{y^2 - x} - e. \end{cases}$

Pour les équations n°s 993 à 997, construire les courbes intégrales au voisinage de l'origine des coordonnées.

Indication. Dans les problèmes 993 à 997 les points singuliers n'appartiennent pas aux types considérés au début du § 16. Pour les étudier, on peut d'abord construire quelques isoclines, puis établir de quels côtés les courbes intégrales aboutissent au point singulier.

993*. $y' = \frac{xy}{x + y}$. 994*. $y' = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y}$. 995*. $y' = \frac{2xy}{y + x^2}$.

996*. $y' = \frac{xy}{y - x^2}$. 997*. $y' = \frac{y^2}{y + x^2}$.

998. Démontrer que, si le point singulier de l'équation

$$(ax + by)\,dx + (mx + ny)\,dy = 0$$

est un centre, cette équation est aux différentielles totales. La réciproque n'est pas vraie.

999*. Démontrer que, si l'équation du problème précédent n'est pas aux différentielles totales mais possède toutefois un facteur intégrant continu au voisinage de l'origine des coordonnées, alors le point singulier est un col (sous réserve que $an \neq bm$).

1000*. Supposons que dans l'équation

$$y' = \frac{ax + by + p(x, y)}{cx + dy + q(x, y)} \qquad (1)$$

les fonctions p et q sont définies et continûment dérivables dans un certain voisinage du point (0, 0) et, qu'en ce même point, $p = p'_x = p'_y = q = q'_x = q'_y = 0$. Démontrer que, si l'équation (1) ne change pas par substitution de $-y$ à y et que les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

soient des imaginaires purs, alors le point singulier (0, 0) est un centre.

§ 17. Plan des phases

1. Pour les notions d'espace des phases, de plan des phases, de système autonome et de trajectoire, on peut se référer à l'ouvrage [1], chapitre VII, § 1, point 4 ou à [3], § 15, ou encore à [4], chapitre 3, § 1.

2. Pour construire les trajectoires du système

$$\dot{x} = f_1(x, y), \quad \dot{y} = f_2(x, y) \tag{1}$$

dans un plan des phases x, y, il faut soit étudier directement ce système, soit, en divisant une équation par l'autre, le réduire à l'équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}. \tag{2}$$

Les trajectoires du système (1) seront représentées par les courbes intégrales de l'équation (2) que l'on peut construire soit en résolvant celle-ci, soit à l'aide de la méthode des isoclines (§ 1), les points singuliers du système devant être étudiés par les méthodes du § 16.

La construction des trajectoires de l'équation $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ dans un plan des phases nécessite qu'on passe de cette équation au système $\dot{x} = y$, $\dot{y} = f(x, y)$ dont l'étude est analogue à celle du système (1).

3. On appelle cycle limite une trajectoire fermée possédant un voisinage entièrement rempli de trajectoires qui tendent indéfiniment vers cette trajectoire fermée pour $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$. On dit de ce cycle limite qu'il est stable si les trajectoires ne tendent vers lui que pour $t \to +\infty$, instable si cette tendance s'observe seulement pour $t \to -\infty$ et semi-stable si d'un côté du cycle les trajectoires tendent vers celui-ci pour $t \to +\infty$ et de l'autre pour $t \to -\infty$. Pour des cycles limites, se référer à [3], § 28 et [2], § 25.

Construire les trajectoires dans le plan des phases pour les équations données ci-dessous. Etudier graphiquement le comportement des solutions pour $t \to +\infty$:

1001. $\ddot{x} + 4x = 0.$

1002. $\ddot{x} - x = 0.$

1003. $\ddot{x} - x + x^2 = 0.$

1004. $\ddot{x} - 3x^2 = 0.$

1005. $\ddot{x} + 2x^3 = 0.$

1006. $\ddot{x} + 2x^3 - 2x = 0.$

1007. $\ddot{x} + e^x - 1 = 0.$

1008. $\ddot{x} - 2^x + x + 1 = 0.$

1009. $\ddot{x} - \sin x = 0.$

1010. $\ddot{x} + 2\cos x - 1 = 0.$

1011. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0.$

1012. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0.$

1013. $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0.$

1014. $\ddot{x} + 2\dot{x} + \dot{x}^2 + x = 0.$

1015. $\ddot{x} + \dot{x} + 2x - x^2 = 0.$

1016. $\ddot{x} + \dot{x}^2 - x^2 + 1 = 0.$

1017. $\ddot{x} + 2^{\dot{x}} - x^2 = 0.$

1018. $\ddot{x} + \sqrt{x^2 + \dot{x}^2 - 1} = 0.$

1019. $\ddot{x} + 5\dot{x} - 4 \ln \frac{x^2+1}{2} = 0.$

1020. $\ddot{x} + \dot{x} + \operatorname{arc\,tg}(x^2 - 2x) = 0.$

Construire dans le plan des phases les trajectoires des systèmes donnés ci-dessous et étudier les points singuliers:

1021. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1, \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1. \end{cases}$

1022. $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2, \\ \dot{y} = 4y - 8. \end{cases}$

1023. $\begin{cases} \dot{x} = 4 - 4x - 2y, \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$

1024. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

1025. $\begin{cases} \dot{x} = 2 + y - x^2, \\ \dot{y} = 2x(x - y). \end{cases}$

1026. $\begin{cases} \dot{x} = xy - 4, \\ \dot{y} = (x - 4)(y - x). \end{cases}$

1027. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy. \end{cases}$

1028. $\begin{cases} \dot{x} = 2(x - 1)(y - 2), \\ \dot{y} = y^2 - x^2. \end{cases}$

1029. $\begin{cases} \dot{x} = (x + y)^2 - 1, \\ \dot{y} = -y^2 - x + 1. \end{cases}$

1030. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \\ \dot{y} = 9 - (x - 2y)^2. \end{cases}$

1031. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \\ \dot{y} = (x - 2y)^2 - 9. \end{cases}$

1032. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 6x - 8y, \\ \dot{y} = x(2y - x + 5). \end{cases}$

1033. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y, \\ \dot{y} = (x - y)(x - y + 2). \end{cases}$

1034. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 5, \\ \dot{y} = (x-1)(x+3y-5). \end{cases}$

1035. Trouver l'équation du mouvement pendulaire (sans résistance). Construire les trajectoires dans le plan des phases pour le cas où toutes les constantes de l'équation sont égales à 1. Donner une interprétation physique aux différents types de trajectoires.

1036. Trouver l'équation du mouvement pendulaire, étant donné que la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Construire les trajectoires dans le plan des phases.

I n d i c a t i o n. Se servir du graphique du problème nº 1035.

1037. Trouver l'équation du mouvement d'un pendule soumis à une force constante égale à la moitié de son poids et dirigée toujours dans le même sens suivant la tangente à l'arc de circonférence que décrit le pendule.

Posant les constantes l et g égales à 1, construire les trajectoires de l'équation obtenue dans le plan des phases. Quels sont les mouvements du pendule représentés par les différents types de trajectoires?

1038. Un poids de masse m suspendu à un ressort et écarté d'une distance x de sa position d'équilibre subit l'action d'une force kx exercée par le ressort et dirigée vers son état d'équilibre. La force de frottement f = const est orientée dans le sens inverse de la vitesse du poids. Pour $t = 0$, celui-ci est à une distance h de son état d'équilibre et a une vitesse nulle.

Déduire l'équation du mouvement du poids. Prenant $m = 2$, $k = 2$, $f = 1$, $h = 5$, représenter le mouvement du poids dans le plan des phases.

1039. Représenter dans le plan des phases les oscillations faibles d'un pendule de longueur variable, notamment égale à l pendant son mouvement vers le haut et à $L > l$ vers le bas. De combien de fois augmente l'amplitude pendant une oscillation complète? (Exemple: mouvement d'une balançoire.)

I n d i c a t i o n. Pour les faibles oscillations, poser $\sin x \approx x$. La variation de la longueur du pendule est instantanée (saut), l'écart et le moment de la quantité de mouvement du pendule par rapport à l'axe ne subissant pas de sauts.

Construire dans le plan des phases les trajectoires des systèmes nos 1040 à 1046 donnés en coordonnées polaires et établir s'il y a existence de cycles limites:

1040. $\frac{dr}{dt} = r(1-r^2)$, $\frac{d\varphi}{dt} = 1$.

1041. $\frac{dr}{dt} = r(r-1)(r-2)$, $\frac{d\varphi}{dt} = 1$.

1042. $\frac{dr}{dt} = r(1-r)^2, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$

1043. $\frac{dr}{dt} = \sin r, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$

1044. $\frac{dr}{dt} = r(|r-1| - |r-2| - 2r + 3), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$

1045. $\frac{dr}{dt} = r \sin \frac{1}{r}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$

1046. $\frac{dr}{dt} = r(1-r) \sin \frac{1}{1-r}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1.$

1047*. Pour quelles conditions le système

$$\frac{dr}{dt} = f(r), \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1,$$

où la fonction $f(r)$ est continue, admet-il un cycle limite? A quelles conditions celui-ci est-il stable? Instable? Semi-stable?

1048*. Quelles sont les valeurs de la constante a pour lesquelles le système

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1, \quad \frac{dr}{dt} = (r-1)(a + \sin^2 \varphi)$$

a un cycle limite stable? Instable?

Pour les équations ci-dessous, construire à l'aide des isoclines les trajectoires dans le plan des phases et en étudier les points singuliers. Etudier graphiquement le comportement des solutions pour $t \to +\infty$, dire si les trajectoires fermées peuvent exister:

1049. $\ddot{x} + \dot{x}^3 - \dot{x} + x = 0.$ **1050.** $\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$

1051. $\ddot{x} + \ddot{x} - 2 \operatorname{arc\,tg} \dot{x} + x = 0.$ **1052.** $\ddot{x} + 2^x - \dot{x} + x = 0.$

1053*. Pour l'équation $\ddot{x} + 2a\dot{x} - b \operatorname{sign} \dot{x} + x = 0$ $(0 < a < 1,\ b > 0)$ construire les trajectoires dans le plan des phases et trouver les points en lesquels le cycle limite coupe l'axe Ox.

I n d i c a t i o n. Etablir la relation entre les abscisses de deux intersections consécutives de la trajectoire avec l'axe Ox.

1054. Montrer que l'équation $\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = 0$, où la fonction F est continue et $F(y) > 0$ pour $y > 0$, $F(y) < 0$ pour $y < 0$, ne peut posséder de cycles limites dans le plan des phases.

I n d i c a t i o n. Etudier le signe de la dérivée totale $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$.

1055*. Soient $f(x, y)$ et f'_x, f'_y continues, $f(0, 0) < 0$, et pour $x^2 + y^2 > b^2$ l'on a $f(x, y) > 0$. Prouver que l'équation $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + x = 0$ a une solution périodique $x(t) \not\equiv 0$.

I n d i c a t i o n. Passer au plan des phases et étudier le signe de la dérivée totale $\frac{d}{dt}(x^2+y^2)$. Construire une boucle dont nulle trajectoire ne peut ressortir. Appliquer le théorème 21 de [3].

§ 18. Dépendance de la solution par rapport aux conditions initiales et paramètres. Solutions approchées des équations différentielles

1. Considérons le système en notation vectorielle

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \tag{1}$$

où $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $f=(f_1,\ldots,f_n)$. Soit dans le domaine considéré le vecteur fonction f continu en t, x et satisfaisant à la condition de Lipschitz *) en x:

$$\|f(t,y)-f(t,x)\|\leqslant k\|y-x\|; \tag{2}$$

$\|\ \|$ désigne l'une quelconque des normes employées du vecteur:

$$\|x\|=\sqrt{|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2},$$

$$\|x\|=|x_1|+\ldots+|x_n|$$

ou

$$\|x\|=\max_{i=1,\ldots,n}|x_i|.$$

Soient $x(t)$ et $y(t)$ respectivement la solution du système (1) et le vecteur fonction vérifiant les inégalités

$$\left\|\frac{dy}{dt}-f(t,y)\right\|\leqslant\eta,\quad \|y(0)-x(0)\|\leqslant\delta.$$

Il en résulte donc l'estimation

$$\|x(t)-y(t)\|\leqslant\delta e^{k|t|}+\frac{\eta}{k}(e^{k|t|}-1). \tag{3}$$

Cette inégalité peut s'appliquer pour estimer grossièrement l'erreur de la solution approchée $y(t)$ du système (1) ainsi que pour majorer la différence des solutions $x(t)$ du système (1) et $y(t)$ du système $\frac{dy}{dt}=g(t,y)$, si $\|g(t,y)-f(t,y)\|\leqslant\eta$).

2. Si dans le système d'équations

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\ldots,x_n,\mu),\quad i=1,\ldots,n, \tag{4}$$

---

*) Si dans un domaine convexe en x l'on a $\left|\frac{df_i}{di_j}\right|\leqslant a$ $(i,j=1,\ldots,n)$, la condition de Lipschitz y est remplie avec $k=na$.

vérifiant les conditions initiales

$$x_i(0) = a_i(\mu), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

où μ est un paramètre, les fonctions f_i et a_i $(i = 1, \ldots, n)$ sont continues et possèdent des dérivées continues en $x_1, \ldots, x_n, \mu$, alors la solution admet une dérivée continue en paramètre μ. Les dérivées $\frac{\partial x_i}{\partial \mu} = u_i$, $i = 1, \ldots, n$, satisfont au système d'équations linéaires

$$\frac{du_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \mu}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

et aux conditions initiales $u_i(0) = a_i'(\mu)$, $i = 1, \ldots, n$. Les valeurs des dérivées $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial f_i}{\partial \mu}$ dans la formule (6) sont prises pour $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$, où $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ est une solution du système (4) avec les conditions initiales (5).

En particulier, si l'on pose $a_k(\mu) = \mu$, $a_i(\mu) = \text{const}$ pour $i \neq k$ en supposant toutes les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ indépendantes de μ, il résultera de la proposition précédente que, pour le système (4) avec les conditions initiales $x_i(0) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$, les dérivées $\frac{\partial x_i}{\partial a_k} = u_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ des composantes de la solution $x_1, \ldots, x_n$, par rapport à la condition initiale a_k, existent et vérifient le système d'équations

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

et les conditions initiales $u_i(0) = 0$ pour $i \neq k$, $u_k(0) = 1$.

3. Si dans (4) et (5) les fonctions f_i et a_i ont des dérivées continues en $x_1, \ldots, x_n, \mu$ (au voisinage de la valeur $\mu = 0$) jusqu'à l'ordre m inclus, la solution possède également des dérivées continues en μ jusqu'à l'ordre m et, par conséquent, se développe en série de Taylor suivant les puissances du paramètre μ :

$$x(t) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \ldots + \mu^m v_m(t) + o(\mu^m), \tag{7}$$

où x et v_i sont des vecteurs fonctions à n dimensions. Pour définir les fonctions $v_i(t)$, on peut développer les seconds membres de (4) et de (5) en puissances de μ, y porter le développement de (7) et égaler les coefficients d'une même puissance de μ. On obtient donc un système d'équations différentielles d'où l'on définit successivement $v_0(t)$, $v_1(t)$, . . .

Lorsque f_i et a_i sont des fonctions analytiques de $x_1, \ldots, x_n$, μ, la solution $x(t)$ se développe en une série entière convergente

pour des μ petits (en vertu du théorème de la dépendance analytique de la solution par rapport au paramètre, cf. [4], chapitre 1, § 6). Les coefficients de cette série coïncident avec ceux du développement (7).

La méthode mentionnée peut s'appliquer à la recherche de la solution d'une équation différentielle pour des μ petits dans les cas où pour $\mu = 0$ l'équation est résoluble par des méthodes connues.

E x e m p l e. Développer en puissances du paramètre μ la solution du problème

$$\dot{x} = x^2 + 2\mu t^{-1}, \quad x(1) = -1. \tag{8}$$

Cherchons la solution sous la forme

$$x(t) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \ldots$$

En portant dans (8) et en égalant les coefficients d'une même puissance de μ, on obtient le système

$$\dot{v}_0 = v_0^2, \qquad v_0(1) = -1,$$
$$\dot{v}_1 = 2v_0v_1 + 2t^{-1}, \quad v_1(1) = 0,$$
$$\dot{v}_2 = 2v_0v_2 + v_1^2, \quad v_2(1) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De la première équation et de la condition initiale l'on tire $v_0(t) = -t^{-1}$. En portant dans la deuxième équation, on a

$$\dot{v}_1 = -2t^{-1}v_1 + 2t^{-1}, \quad v_1(1) = 0,$$

d'où

$$v_1(t) = 1 - t^{-2}.$$

En portant les valeurs de v_0 et v_1 trouvées dans la troisième équation, il vient

$$\dot{v}_2 = -2t^{-1}v_2 + (1 - t^{-2})^2, \quad v_2(1) = 0.$$

En résolvant cette équation linéaire et en utilisant la condition initiale, on trouve $v_2(t) = \frac{t}{3} - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3}$. Par conséquent, la solution du problème (8) a la forme

$$x(t) = -\frac{1}{t} + \mu\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) + \mu^2\left(\frac{t}{3} - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3}\right) + o(\mu^2).$$

On peut continuer de même.

D'une manière analogue, on parvient à développer en puissances du paramètre les solutions périodiques des équations non

linéaires, en particulier de la forme

$$\ddot{x} + a^2 x = \mu f(t, x, \dot{x}, \mu), \tag{9}$$

où la fonction f est périodique en t. Ici, le passage de l'équation du second degré à un système n'est pas obligatoire. Les constantes arbitraires qui apparaissent quand on cherche $v_0(t)$, $v_1(t)$, ... se déterminent déjà à partir des conditions de périodicité et non pas à partir des conditions initiales (cf. [4], chapitre 2, § 8).

Dans le cas où le second membre de (9) ne dépend pas de t, la période de la solution $x(t)$ n'est pas connue à l'avance. Alors, dans l'équation (9) il convient de passer de t à une nouvelle variable indépendante $\tau = t(1 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \ldots)$ et de chercher les solutions $x(\tau)$ de période $2\pi/a$. Le coefficient b_1 se tire d'ordinaire de la condition d'existence de la solution périodique pour $v_1(\tau)$ et ainsi de suite (cf. [4], chapitre 2, § 8).

4. Si la fonction $f(x, y)$ est analytique au voisinage du point (x_0, y_0), c'est-à-dire se développe en une série de puissances de $(x - x_0)$ et $(y - y_0)$, la solution de l'équation $y' = f(x, y)$ avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$ est également une fonction analytique, c'est-à-dire se développe en une série entière au voisinage du point x_0 (cf. [2], § 18 et [1], chapitre II, § 1, point 6). Une assertion analogue est valable pour les équations $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

E x e m p l e. Trouver sous forme d'une série la solution de l'équation $y'' = xy^2 - y'$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Cherchons la solution sous forme de la série:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = 2 + x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots), \tag{10}$$

car des conditions initiales il vient que $a_0 = 2$, $a_1 = 1$. Portant la série dans l'équation différentielle, on obtient

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \ldots = x(2 + x + a_2 x^2 + \ldots)^2 - \\ - 1 - 2a_2 x - 3a_3 x^2 - \ldots$$

En mettant le second membre sous forme d'une série entière et en égalant les coefficients d'une même puissance de x dans les deux membres de l'équation, on trouve $2a_2 = -1$, $6a_3 = 4 - 2a_2$, $12a_4 = 4 - 3a_3$, ... D'où

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{5}{6}, \quad a_4 = \frac{1}{8}, \ \ldots$$

Et, par conséquent,

$$y = 2 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \ldots$$

5. L'équation

$$p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0, \qquad (11)$$

où tous les $p_i(x)$ sont analytiques au voisinage du point x_0 et $p_0(x_0) = 0$, c'est-à-dire que le coefficient de la dérivée d'ordre supérieur s'annule au point x_0, peut ne pas avoir de solutions sous forme d'une série entière. Dans ce cas, peuvent exister des solutions sous forme de séries entières généralisées:

$$a_0(x - x_0)^r + a_1(x - x_0)^{r+1} + a_2(x - x_0)^{r+2} + \ldots, \qquad (12)$$

où le nombre r n'est pas nécessairement entier (cf. [1], chapitre VI, § 2, point 2 ou [4], chapitre 2, § 7). Pour définir ces solutions, il faut porter la série (12) dans l'équation (11) et, après avoir égalé les coefficients de la plus petite puissance de $(x - x_0)$, trouver les valeurs possibles de l'exposant r et définir ensuite les coefficients a_i pour chacune de ces valeurs de r.

1056. Evaluer, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, de combien peut varier la solution de l'équation $y' = x + \sin y$ vérifiant la condition initiale $y(0) = y_0 = 0$, si le nombre y_0 varie de moins de 0,01.

1057. Evaluer, pour $0 \leqslant t \leqslant T$, de combien peut varier la solution de l'équation du pendule $\ddot{x} + \sin x = 0$ vérifiant les conditions initiales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, si l'on ajoute au second membre de l'équation une fonction $\varphi(t)$ telle que $|\varphi(t)| \leqslant 0{,}1$ (c'est-à-dire si l'on applique une certaine force extérieure).

1058. Pour résoudre en approximations l'équation $\ddot{x} + \sin x = 0$ on la remplace par une autre, $\ddot{x} + x = 0$. Evaluer, pour $0 \leqslant t \leqslant 2$, l'erreur de la solution, pour des conditions initiales $x(0) = 0{,}25$, $\dot{x}(0) = 0$, sachant que $|x - \sin x| < 0{,}003$ pour $|x| \leqslant 0{,}25$.

Evaluer l'erreur de la solution approchée dans l'intervalle indiqué:

1059. $y' = \frac{x}{4} - \frac{1}{1+y^2}$, $y(0) = 1$; $\tilde{y} = 1 - \frac{x}{2}$, $|x| \leqslant \frac{1}{2}$.

1060. $\dot{x} = x - y$, $\dot{y} = tx$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$; $\tilde{x} = 1 + t + \frac{t^2}{2}$, $\tilde{y} = \frac{t^2}{2}$, $|t| \leqslant 0{,}1$.

1061. $y'' - x^2 y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; $\tilde{y} = e^{x^4/12}$, $|x| \leqslant 0{,}5$.

1062. $y' = \frac{1}{y} + x, \quad y(0) = 1 \,; \quad \tilde{y} = 1 + x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}.$

1063. $y' = 2xy^2 + 1, \quad y(0) = 1 \,; \quad \tilde{y} = \frac{1}{1-x}, \quad |x| \leqslant \frac{1}{4}.$

Indication. Délimiter d'abord un domaine limité renfermant la solution approchée $\tilde{y}$ et, éventuellement, la solution exacte y. Evaluer pour cette région la constante de la condition de Lipschitz et, ensuite, $|y - \tilde{y}|$. Etablir moyennant cette évaluation si y est contenu dans le domaine délimité.

Trouver les dérivées par rapport au paramètre ou aux conditions initiales des solutions des équations et systèmes donnés:

1064. $y' = y + \mu(x + y^2), \quad y(0) = 1$; trouver $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1065. $y' = 2x + \mu y^2, \quad y(0) = \mu - 1$; trouver $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1066. $y' = y + y^2 + xy^3, \quad y(2) = y_0$; trouver $\left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$.

1067. $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \mu t e^{-x}, \quad x(1) = 1$; trouver $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1068. $\frac{dx}{dt} = x^2 + \mu t x^3, \quad x(0) = 1 + \mu$; trouver $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1069. $\begin{cases} \dot{x} = 4ty^2, \\ \dot{y} = 1 + 5\mu x, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0$; trouver $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1070. $\begin{cases} \dot{x} = xy + t^2, & x(1) = x_0, \\ 2\dot{y} = -y^2, & y(1) = y_0 \,; \end{cases}$ trouver $\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_{\substack{x_0=3 \\ y_0=2}}$.

1071. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, & x(0) = 1 + \mu, \\ \dot{y} = 2x + \mu y^2, & y(0) = -2 \,; \end{cases}$ trouver $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

1072. $\ddot{x} - \dot{x} = (x+1)^2 - \mu x^2 \,; \quad x(0) = \frac{1}{2}, \quad \dot{x}(0) = -1$;

trouver $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}$.

1073. $\ddot{x} = \frac{2}{t} - \frac{2}{x}, \quad x(1) = 1, \quad \dot{x}(1) = b$; trouver $\left.\frac{\partial x}{\partial b}\right|_{b=1}$.

Indication. Pour $b = 1$, la fonction $x = t$ est une solution.

Trouver 2 ou 3 termes du développement de la solution en puissances du petit paramètre μ :

1074. $y' = 4\mu x - y^2, \quad y(1) = 1.$

1075. $y' = \frac{2}{y} - 5\mu x, \quad y(1) = 2.$

1076. $xy' = \mu x^2 + \ln y, \quad y(1) = 1.$

1077. $y' = \frac{6\mu}{x} - y^2, \quad y(1) = 1 + 3\mu.$

1078. $y' = e^{y-x} + \mu y, \quad y(0) = -\mu.$

Trouver, à l'aide de la méthode du petit paramètre (cf. [4], chapitre 2, § 8), les solutions périodiques approchées de période égale à celle du second membre de l'équation; μ est le petit paramètre:

1079. $\ddot{x} + 3x = 2 \sin t + \mu \dot{x}^2.$ 1080. $\ddot{x} + 5x = \cos 2t + \mu x^2.$

1081. $\ddot{x} + 3x + x^3 = 2\mu \cos t.$ 1082. $\ddot{x} + x^2 = 1 + \mu \sin t.$

1083. $\ddot{x} + \sin x = \mu \sin 2t.$

1084*. $\ddot{x} + x = \sin 3t - \sin 2t + \mu x^2$; trouver uniquement l'approximation nulle.

1085*. $\ddot{x} + x = 6\mu \sin t - x^3.$

En appliquant la méthode du petit paramètre (cf. [4], chapitre 2, § 8, point 4), trouver les solutions périodiques approchées des équations données:

1086. $\ddot{x} + x - x^2 = 0.$ 1087. $\ddot{x} + x + x^3 = 0.$

1088. $\ddot{x} + \sin x = 0.$ 1089. $\ddot{x} + x = \mu (1 - x^2) \dot{x}.$

1090. $\ddot{x} + x = \mu (\dot{x} - \dot{x}^3).$

Trouver sous forme d'une série entière la solution vérifiant les conditions initiales données. Calculer quelques-uns des coefficients de la série (jusqu'au coefficient de x^4 inclus):

1091. $y' = y^2 - x; \quad y(0) = 1.$ 1092. $y' = x + \frac{1}{y}; \quad y(0) = 1.$

1093. $y' = y + xe^y; \quad y(0) = 0.$

1094. $y' = 2x + \cos y; \quad y(0) = 0.$

1095. $y' = x^2 + y^3; \quad y(1) = 1.$

1096. $y'' = xy' - y^2; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

1097. $y'' = y'^2 + xy; \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2.$

1098*. En formant l'équation majorante (cf. [2], § 18), minorer le rayon de convergence de la série entière qui est solution de l'équation $y' = y^2 - x$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

1099*. Evaluer la précision avec laquelle il est possible d'obtenir, pour $|x| \leqslant 0{,}2$, la solution de l'équation $y' = e^y - x^2 y$

vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$, si de la série entière représentant la solution on ne garde que quatre termes (jusqu'à a_4x^4 inclus).

Trouver sous forme de séries entières les solutions linéairement indépendantes de chacune des équations données. Dans les cas où cela ne présente pas de difficulté, exprimer la somme de la série à l'aide de fonctions élémentaires:

1100. $y'' - x^2y = 0$. **1101.** $y'' - xy' - 2y = 0$.

1102. $(1 - x^2) y'' - 4xy' - 2y = 0$.

1103. $(x^2 + 1) y'' + 5xy' + 3y = 0$.

1104. $(1 - x) y'' - 2y' + y = 0$.

1105. $(x^2 - x + 1) y'' + (4x - 2) y' + 2y = 0$.

1106. $y'' - xy' + xy = 0$. **1107.** $y'' + y \sin x = 0$.

1108. $xy'' + y \ln(1 - x) = 0$.

1109. $y''' - xy'' + (x - 2) y' + y = 0$.

Trouver les solutions des équations données qui s'expriment par des séries entières (ou par des séries entières généralisées):

1110. $xy'' + 2y' + xy = 0$.

1111. $2x^2y'' + (3x - 2x^2) y' - (x + 1) y = 0$.

1112. $9x^2y'' - (x^2 - 2) y = 0$.

1113. $x^2y'' - x^2y' + (x - 2) y = 0$.

1114. $x^2y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2) y = 0$.

1115. $xy'' - xy' - y = 0$. **116.** $xy'' + y' - xy = 0$.

1117. Trouver à $O(x^5)$ près, pour $x \to 0$, la solution de l'équation $xy'' + y' - xy = 0$ linéairement indépendante de celle donnée dans la réponse au problème n° 1116.

Dire si les équations données admettent une solution sous forme d'une série entière (ou d'une série entière généralisée):

1118. $x^2y'' + xy' - (x + 2) y = 0$.

1119. $x^2y'' + xy' + (1 - x) y = 0$.

1120. $x^2y'' + (3x - 1) y' + y = 0$.

Trouver sous forme de séries trigonométriques (cf. [1], chapitre VI, § 1, point 3 ou [4], chapitre 2, § 7) les solutions périodiques des équations:

1121. $y'' - 3y = f(x)$, $f(x) = |x|$ pour $|x| \leqslant \pi$, $f(x + 2\pi) \equiv f(x)$.

1122. $y'' + y' + y = |\sin x|$.

1123. $y''' - y'' - y = \dfrac{2 \sin x}{5 - 4 \cos x}$.

Indication. Le développement en série de Fourier du second membre de l'équation nº 1123 a la forme $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin nx$.

1124. $y'' - \pi^2 y = f(x)$, $f(x) = x(1-x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x+1) \equiv f(x)$.

1125. $y'' + 9y = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2kx}{k^2}$.

En appliquant la méthode de la tangente d'Euler (avec ou sans itérations, cf. [4], chapitre 1, §§ 6, 7), trouver dans l'intervalle donné les solutions approchées des équations ci-dessous vérifiant les conditions initiales données. Faire les calculs à la deuxième ou à la troisième décimale avec un pas $h = 0{,}2$ ou $h = 0{,}1$:

1126. $y' = y^2 + x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 0{,}3$.

1127. $y' = \dfrac{1}{y} + x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 1$.

1128. $y' = \dfrac{x}{y} - y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 1$.

1129. $y' = \dfrac{x^2}{x+y}$, $1 \leqslant x \leqslant 2$; $y(1) = 0$.

En appliquant la méthode d'Adams ou celle de Shtermer (cf. [4], chapitre 1, § 7), calculer, à la troisième décimale, les solutons approchées des équations données ci-dessous dans l'intervalle indiqué. Calculer les valeurs des solutions aux points initiaux à l'aide de la série entière:

1130. $y' = y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 1$.

1131. $y' = y^2 - x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 0{,}5$.

1132. $y' = \dfrac{1}{y} - x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 1$.

1133. $y' = x^2 - y^2$, $1 \leqslant x \leqslant 2$; $y(1) = 1$.

1134. $y'' = xy$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

1135. $xy'' + y' + xy = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Résoudre les problèmes nºs 1136 à 1140 en comparant la pente du champ des directions (défini par l'équation $y' = f(x, y)$) aux points de certaines courbes $y = \varphi_i(x)$ avec la pente de celles-ci.

1136*. Majorer et minorer la solution de l'équation $y' = 2 + \sin x - y^2$, $0 \leqslant x < +\infty$, $y(0) = 1$. (Construire dans

le plan x, y une bande $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$ contenant entièrement cette solution.)

1137*. Majorer et minorer la solution de l'équation $y' = \frac{1}{y} + 2x$, $0 \leqslant x < +\infty$, $y(0) = 1$.

1138*. Démontrer que la solution de l'équation $y' = x - y^2$ satisfaisant à la condition initiale $y(4) = 2$ vérifie les inégalités $\sqrt{x} - 0{,}07 < y(x) < \sqrt{x}$ pour $4 < x < \infty$.

1139*. Démontrer que, pour la solution $y(x)$ de l'équation $y' = x - y^2$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$, où $x_0 \geqslant 0$, $y_0 \geqslant 0$, l'on a

$$y(x) - \sqrt{x} \to 0 \quad \text{pour} \quad x \to +\infty.$$

1140*. Majorer et minorer la solution périodique de l'équation $y' = 2y^2 - \cos^2 5x$ contenue dans le domaine $y < 0$.

§ 19. Systèmes non linéaires

1. Un système d'équations différentielles peut, par élimination des inconnues, se ramener à une seule équation (parfois à plusieurs équations à une fonction inconnue chacune). Pour plus de détail, cf. [1], chapitre VII, § 1, point 2 ou [4], chapitre 3, § 2.

E x e m p l e 1. Résoudre le système d'équations

$$y' = \frac{z}{x}, \quad z' = \frac{(y-z)^2 + xz}{x^2}. \tag{1}$$

S o l u t i o n. Eliminons z entre les équations données. De la première équation il vient $z = xy'$. Portant ceci dans la seconde, on a après simplifications:

$$x^3 y'' = (y - xy')^2.$$

Le système d'équations (1) est donc ramené à une seule équation du deuxième ordre résoluble par les méthodes mentionnées au § 10 (par abaissement de l'ordre). Après avoir déduit y de cette équation, on cherche à définir z en utilisant l'égalité $z = xy'$.

2. La résolution d'un système d'équations par élimination des inconnues aboutit ordinairement à une équation d'ordre supérieur, c'est pourquoi il est plus commode de résoudre le système par la recherche de combinaisons intégrables (cf. [1], chapitre VII, § 5, point 2).

Exemple 2. Résoudre le système *)

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-xy}. \qquad (2)$$

Les deux premières fractions forment une combinaison intégrable. En simplifiant l'égalité $\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}$ par $\frac{1}{z}$ et en intégrant, on obtient l'intégrale première **):

$$\frac{x}{y}=C_1. \qquad (3)$$

Pour trouver une deuxième combinaison intégrable, utilisons la propriété suivante des fractions égales: si $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=$ $=\frac{a_n}{b_n}=t$, alors, quels que soient $k_1, k_2, \ldots, k_n$, on a

$$\frac{k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\ldots+k_nb_n}=t.$$

En vertu de cette propriété, on déduit de (2)

$$\frac{y\cdot dx+x\cdot dy}{y\cdot xz+x\cdot yz}=\frac{dz}{-xy}; \quad \frac{d(xy)}{2xyz}=\frac{dz}{-xy}; \quad d(xy)=-2z\,dz.$$

Par conséquent,

$$xy+z^2=C_2. \qquad (4)$$

Manifestement, les intégrales premières (3) et (4) sont indépendantes. Le système est donc résolu.

Au lieu de chercher la deuxième combinaison intégrable, on peut, connaissant l'intégrale première (3), éliminer du système (2) l'une des inconnues, par exemple x. De (3) on a $x=C_1y$. En portant dans la deuxième des équations (2), on obtient $\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-C_1y^2}$. D'où $-C_1ydy=zdz$; $z^2=-C_1y^2+C_2$. En portant ici l'expression de C_1 tirée de la formule (3), on trouve encore une intégrale première: $z^2+xy=C_2$.

Résoudre les systèmes d'équations donnés:

1141. $y'=\frac{x}{z}$, $z'=-\frac{x}{y}$. **1142.** $y'=\frac{y^2}{z-x}$, $y'=y+1$.

1143. $y'=\frac{z}{x}$, $z'=\frac{z(y+2z-1)}{x(y-1)}$.

1144. $y'=y^2z$, $z'=\frac{z}{x}-yz^2$.

1145. $2zy'=y^2-z^2+1$, $z'=z+y$. **1146.** $\frac{dx}{2y-z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$.

*) Le système (2) est donné sous forme symétrique; pour la forme symétrique d'un système d'équations différentielles, cf. [1], chapitre VII, § 5, point 1, ou [4], chapitre 3, § 3.

**) Pour les intégrales premières, cf. [1], chapitre VII, § 4 ou [3], § 23.

1147. $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{z}$. 1148. $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x+y}$.

1149. $\frac{dx}{y-x}=\frac{dy}{x+y+z}=\frac{dz}{x-y}$. 1150. $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{u}=\frac{dz}{x}=\frac{du}{y}$.

1151. $\frac{dx}{y-u}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{u-y}=\frac{du}{x-z}$.

1152. $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{y}$. 1153. $\frac{dx}{z^2-y^2}=\frac{dy}{z}=-\frac{dz}{y}$.

1154. $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xy+z}$. 1155. $\frac{dx}{xz}+\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$.

1156. $\frac{dx}{x+y^2+z^2}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$.

1157. $\frac{dx}{x(y+z)}=\frac{dy}{z(z-y)}=\frac{dz}{y(y-z)}$.

1158. $-\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{xy-2z^2}=\frac{dz}{xz}$.

1159. $\frac{dx}{x(z-y)}=\frac{dy}{y(y-x)}=\frac{dz}{y^2-xz}$.

1160. $\frac{dx}{x(y^2-z^2)}=-\frac{dy}{y(z^2+x^2)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

Pour les systèmes d'équations différentielles et les fonctions φ donnés, établir si les relations $\varphi = C$ sont intégrales premières:

1161. $\frac{dx}{dt}=\frac{x^2-t}{y}$, $\frac{dy}{dt}=-x$; $\varphi_1=t^2+2xy$; $\varphi_2=x^2-ty$.

1162. $\dot{x}=xy$, $\dot{y}=x^2+y^2$; $\varphi_1=x\ln y-x^2y$; $\varphi_2=\frac{y^2}{x^2}-2\ln x$.

1163. $\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}=\frac{dz}{u}=-\frac{du}{z}$; $\varphi=yz-ux$.

1164. Etablir si les intégrales premières $\frac{x+y}{z+x}=C_1$, $\frac{z-y}{x+y}=C_2$ du système

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

sont indépendantes.

1165*. Démontrer que dans tout domaine contenant un point singulier du type nœud ou foyer, le système

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y)$$

ne peut admettre une intégrale première de la forme $\varphi(x, y) = C$, où $\varphi \not\equiv$ const est une fonction continue, dans un voisinage aussi petit que l'on veut du point singulier.

1166. Soit $\varphi_1(t, x, y) = C_1$, $\varphi_2(t, x, y) = C_2$ des intégrales premières du système $\frac{dx}{dt}=f_1(t, x, y)$, $\frac{dy}{dt}=f_2(t, x, y)$; les

fonctions f_1, f_2 et leurs dérivées premières par rapport à x, y sont continues. Supposons encore que les surfaces $\varphi_1(t, x, y) = 1$, $\varphi_2(t, x, y) = 2$ dans l'espace t, x, y possèdent une ligne commune et une seule (soit qu'elles se coupent soit qu'elles sont tangentes suivant cette ligne). Démontrer que cette ligne est une courbe intégrale du système donné.

§ 20. Equations aux dérivées partielles du premier ordre

1. Pour résoudre une équation aux dérivées partielles

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = b, \qquad (1)$$

où $a_1, \ldots, a_n$, b sont fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, z, il faut écrire le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b} \qquad (2)$$

et trouver n intégrales premières indépendantes de ce système:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, z) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, z) = C_n. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

La solution générale de l'équation (1) s'écrit implicitement comme suit:

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0, \qquad (4)$$

où F est une fonction dérivable arbitraire.

Si, en particulier, z ne figure que dans l'une des intégrales premières (3), par exemple dans la dernière, la solution générale peut également s'exprimer de la sorte:

$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_n, z) = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}), \qquad (5)$$

où f est une fonction dérivable arbitraire. En résolvant l'égalité (5) par rapport à z on aboutit à la solution générale de l'équation (1) sous sa forme explicite.

2. Pour trouver la surface $z = z(x, y)$ vérifiant l'équation différentielle

$$a_1(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z) \qquad (6)$$

et passant par une ligne donnée:

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad z = w(t), \qquad (7)$$

il convient de rechercher deux intégrales premières indépendantes du système :

$$\frac{dx}{a_1}=\frac{dy}{a^2}=\frac{dz}{b}. \tag{8}$$

A cet effet, au lieu de x, y, z, on doit porter dans ces intégrales premières :

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2 \tag{9}$$

leurs expressions (7) par rapport au paramètre t. Il en résulte deux équations de la forme :

$$\Phi_1(t) = C_1, \quad \Phi_2(t) = C_2. \tag{10}$$

Eliminons t entre celles-ci ; l'on a la relation $F(C_1, C_2) = 0$. En remplaçant C_1 et C_2 par leurs expressions (9) on trouve la solution cherchée.

Dans le cas où t ne figure pas dans les deux équations (10), la ligne (7) est une courbe intégrale du système (8), c'est-à-dire une caractéristique de l'équation (6), et le problème de Cauchy admet une infinité de solutions (cf. [1], chapitre VIII, § 3, point 4).

E x e m p l e. Trouver la solution générale de l'équation

$$xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=-xy \tag{11}$$

et la surface intégrale passant par la courbe

$$y = x^2, \quad z = x^3. \tag{12}$$

S o l u t i o n. Formons le système d'équations

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-xy}$$

et trouvons ses intégrales premières (cf. § 19, exemple 2)

$$\frac{x}{y}=C_1, \quad z^2+xy=C_2. \tag{13}$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (11) peut s'écrire sous forme implicite comme suit :

$$F\left(\frac{x}{y},\ z^2+xy\right)=0,$$

où F est une fonction arbitraire. Comme z figure uniquement dans l'une des intégrales premières (13), la solution générale peut se mettre sous forme explicite, soit

$$z^2+xy=f\left(\frac{x}{y}\right); \quad z=\pm\sqrt{f\left(\frac{x}{y}\right)-xy},$$

où f est une fonction arbitraire.

Pour définir la surface intégrale passant par la courbe (12), écrivons cette dernière sous forme paramétrique, en prenant, par

exemple, x comme paramètre:

$$x = x, \quad y = x^2, \quad z = x^3.$$

Portant ces expressions dans (13) on trouve

$$\frac{1}{x} = C_1, \quad x^6 + x^3 = C_2.$$

Eliminons x entre ces équations, il vient

$$\frac{1}{C_1^6} + \frac{1}{C_1^3} = C_2.$$

Substituant les premiers membres des intégrales premières (13) à C_1 et C_2 on trouve la solution cherchée:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^2 + xy.$$

3. Sur la résolution du système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre et sur celle de l'équation de Pfaff, cf. [1], chapitre IX, §§ 1 et 2, points 1, 2, 3.

Trouver la solution générale des équations suivantes:

1167. $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$ **1168.** $(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

1169. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

1170. $(x-z)\frac{\partial u}{\partial x} + (y-z)\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$

1171. $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$ **1172.** $e^x\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = ye^x.$

1173. $2x\frac{\partial z}{\partial x} + (y-x)\frac{\partial z}{\partial y} - x^2 = 0.$

1174. $xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$ **1175.** $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y + z.$

1176. $(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0.$

1177. $2y^4\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{z^2+1}.$

1178. $x^2z\frac{\partial z}{\partial x} + y^2z\frac{\partial z}{\partial y} = x + y.$ **1179.** $yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = e^z.$

1180. $(z-y)^2\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy.$

1181. $xy\frac{\partial z}{\partial x} + (x-2z)\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$

1182. $y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}.$

1183. $\sin^2 x \frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{tg} z \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z$.

1184. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = x+y$.

1185. $(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x+yz)\frac{\partial z}{\partial y} = 1-z^2$.

1186. $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z} = u$.

1187. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z+u)\frac{\partial u}{\partial z} = xy$.

1188. $(u-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (u-y)\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = x+y$.

Trouver les solutions des équations satisfaisant aux conditions indiquées:

1189. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = 2x$ pour $y = 1$.

1190. $\frac{\partial z}{\partial x} + (2e^x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = y$ pour $x = 0$.

1191. $2\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = y^2$ pour $x = 1$.

1192. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0$; $u = yz$ pour $x = 1$.

1193. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0$; $u = x^2 + y^2$ pour $z = 0$.

Trouver la surface vérifiant l'équation donnée et passant par la courbe donnée:

1194. $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = x$; $x = 0$, $z = y^2$.

1195. $x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$; $y = 1$, $z = x^2$.

1196. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$; $x = 2$, $z = y^2 + 1$.

1197. $\operatorname{tg} x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$; $y = x$; $z = x^3$.

1198. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y)$; $x = 1$, $yz + 1 = 0$.

1199. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$; $y = -2$, $z = x - x^2$.

1200. $yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy$; $x = a$, $y^2 + z^2 = a^2$.

1201. $z\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$; $x + y = 2$, $yz = 1$.

1202. $z\frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2)\frac{\partial z}{\partial y} + x = 0$; $y = x^2$, $z = 2x$.

1203. $(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$; $z - y = -x$.

1204. $x\frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y)\frac{\partial z}{\partial y} = z$; $x + y = 2z$, $xz = 1$.

1205. $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$; $x - y = 0$, $x - yz = 1$.

1206. $x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = y$; $y = 2z$, $x + 2y = z$.

1207. $(y + 2z^2)\frac{\partial z}{\partial x} - 2x^2\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 z$; $x = z$, $y = x^2$.

1208. $(x - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - z)\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$; $x - y = 2$, $z + 2x = 1$.

1209. $xy^3\frac{\partial z}{\partial x} + x^2z^2\frac{\partial z}{\partial y} = y^3 z$; $x = -z^3$, $y = z^2$.

1210*. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$; $y = x$, $z = x^2$.

1211. Trouver l'équation générale des surfaces coupant sous un angle droit les surfaces de la famille

$$z^2 = Cxy.$$

1212. Trouver la surface passant par la droite

$$y = x, \quad z = 1$$

et orthogonale aux surfaces

$$x^2 + y^2 + z^2 = Cx.$$

1213. Ecrire l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les surfaces cylindriques de génératrices parallèles au vecteur (a, b, c). Trouver la solution générale de cette équation.

1214. En appliquant le résultat du problème précédent, trouver l'équation de la surface cylindrique de génératrices parallèles au vecteur $(1, -1, 1)$ et à la directrice

$$x + y + z = 0, \quad x^2 + xy + y^2 = 1.$$

1215. Ecrire l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont toutes les coniques de sommet situé en un point donné (a, b, c). Résoudre cette équation.

1216. Trouver les surfaces dont tout plan tangent coupe l'axe Ox en un point dont l'abscisse est la moitié de celle du point de tangence.

Résoudre les systèmes d'équations:

1217. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2z}{y}. \end{cases}$ 1218. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y - z, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz. \end{cases}$

1219. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2yz - z^2, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz. \end{cases}$

Trouver les surfaces vérifiant les équations de Pfaff:

1220. $(x - y)\, dx + z\, dy - x\, dz = 0.$

1221. $3yz\, dx + 2xz\, dy + xy\, dz = 0.$

1222. $(z + xy)\, dx - (z + y^2)\, dy + y\, dz = 0.$

1223. $(2yz + 3x)\, dx + xz\, dy + xy\, dz = 0.$

Réponses

15. $f(x, y) = 0$; $f'_x < 0$ (max), $f'_x > 0$ (min). **16.** a) $y = x^2 + 2x$; b) $x = 2\operatorname{ch} y$; c) $xy^3 = -(1 - x^2)^2$; $y = 0$; d) $f'_x + f \cdot f'_y = 0$. **17.** $y = e^{xy'/y}$. **18.** $y' = 3y^{2/3}$. **19.** $xy' = 3y$. **20.** $y^2 + y'^2 = 1$. **21.** $x^2y' - xy = yy'$. **22.** $2xyy' - y^2 = 2x^3$. **23.** $y'^3 = 4y(xy' - 2y)$. **24.** $y' = \cos \dfrac{x\sqrt{1 - y'^2}}{y}$. **25.** $x(x-2)y'' - (x^2-2)y' + 2(x-1)y = 0$. **26.** $(yy'' + y'^2)^2 = -y^3y''$. **27.** $y''y^2(\ln y - 1) = y'^2(xy' - y)$. **28.** $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$. **29.** $y'''y' = 3y''^2$. **30.** $(y - 2x)^2(y'^2 + 1) = (2y'^2 + 1)^2$. **31.** $xy'^2 = y(2y' - 1)$. **32.** $(xy' - y)^2 = 2xy(y'^2 + 1)$. **33.** $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$. **34.** $(y''y + y'^2 + 1)^2 = (y'^2 + 1)^3$. **35.** $yy' + zz' = 0$, $y^2 + 2xzz' = x^2z'^2$. **36.** $x^2 + y^2 = z^2 - 2z(y - xy')$; $x + yy' = zz' - z'(y - xy')$. **37.** $4yy' = -x$. **38.** $y' = -2y$. **39.** $(x^2 + y)y' = -x$. **40.** $(x + y)y' = y - x$; $(x - y)y' = x + y$. **41.** $(x \mp y\sqrt{3})y' = y \pm x\sqrt{3}$. **42.** $(3x \mp y\sqrt{3})y' = y \pm 3x\sqrt{3}$. **43.** $(2x \mp y\sqrt{3})y' = y \pm 2x\sqrt{3}$. **44.** $r' \sin\theta = r^2$. **45.** $r' = \frac{1}{2} r \operatorname{cotg}\theta$. **46.** $r' = r \operatorname{cotg}(\theta \pm 45°)$. **47.** $(x + 2y)y' = -3x - y$; $(3x + 2y)y' = y - x$. **48.** $y'[2xy \pm (x^2 - y^2)] = y^2 - x^2 \pm 2xy$. **49.** $x(1 + y'^2) = -2yy'$. **50.** $yy'^3 + xy'^2 = -1$. **51.** $y = C(x + 1)e^{-x}$; $x = -1$. **52.** $\ln|x| = C + \sqrt{y^2 + 1}$; $x = 0$. **53.** $y(\ln|x^2 - 1| + C) = 1$, $y = 0$; $y[\ln(1 - x^2) + 1] = 1$. **54.** $y = 2 + C\cos x$; $y = 2 - 3\cos x$. **55.** $y = (x - C)^3$; $y = 0$; $y = (x - 2)^3$; $y = 0$. **56.** $y(1 - Cx) = 1$; $y = 0$; $y(1 + x) = 1$. **57.** $y^2 - 2 = Ce^{1/x}$. **58.** $(Ce^{-x^2} - 1)y = 2$; $y = 0$. **59.** $e^{-s} = 1 + Ce^t$. **60.** $z = -\lg(C - 10^x)$. **61.** $x^2 + t^2 - 2t = C$.

62. $\operatorname{cotg}\frac{y-x}{2}=x+C$; $y-x=2\pi k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 63. $2x+y-1=Ce^{x}$. 64. $x+2y+2=Ce^{y}$; $x+2y+2=0$. 65. $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2)=x+C$. 66. $y=$ $=\operatorname{arc\,tg}\left(1-\frac{2}{x}\right)+2\pi$. 67. $y=2$. 68. a) $2y^2+x^2=C$; b) y^2+ $+2x=C$; c) $y^2=Ce^{x^2+y^2}$. 71. $(C\pm x)y=2a^2$. 72. $b\ln y-y=$ $=\pm x+C$, $0<y<b$. 73. $a\ln(a\pm\sqrt{a^2-y^2})\mp\sqrt{a^2-y^2}=$ $=x+C$. 74. $y=Cx^2$. 75. $y=Cx^2$; $y^2=Cx$. 76. $r(1\pm\cos\varphi)=C$. 77. La quantité d'azote (en litres) est $x(t)=20-4e^{-t/200}$; $x(t)=19{,}8$ pour $t=200\ln 20\approx 600$ s $=10$ mn. 78. La quantité de sel est $x(t)=10e^{-t/20}$; $x(60)=10e^{-3}\approx 0{,}5$ kg. 79. Le volume de CO_2 (en m^3) est $x(t)=0{,}08+0{,}22e^{-t/10}$; $x(t)=0{,}1$ pour $t=10\ln 11\approx 24$ mn. 80. La température du corps est $x(t)=$ $=20+80\cdot 2^{-t/10}$; $x(t)=25$ pour $t=40$ mn. 81. La différence des températures de l'eau et du corps est $x(t)=55\cdot(3/5)^t$; $x(t)=1$ pour $t=\ln 55/(\ln 5-\ln 3)\approx 8$ mn. 82. La température du métal est $x(t)=a+\frac{b-a}{60}\left(t-\frac{1-e^{-kt}}{k}\right)$; $x(60)=b-\frac{b-a}{60k}\times$ $\times(1-e^{-60k})$. 83. La vitesse (en m/s) est $v(t)=(2/3)^{(t/4)-1}$; $v(t)=0{,}01$ pour $t=4\left(\frac{2}{\lg 1{,}5}+1\right)\approx 50$ s; la distance est $s=$ $=\frac{6}{\ln 1{,}5}\approx 15$ m. 84. La quantité de matière restante est $x(t)=$ $=x(0)\cdot 2^{-t/30}$; $x(t)=0{,}01x(0)$ pour $t=60/\lg 2\approx 200$ jours. 85. La quantité restante de radium est $x(t)=x(0)\cdot(1-0{,}00044)^t$; $x(t)=\frac{1}{2}x(0)$ pour $t=\ln 0{,}5/\ln(1-0{,}00044)\approx 1600$ années. 86. La quantité d'uranium est $x(t)=x(0)\,e^{-\alpha t}$, $\alpha=\ln 2/4{,}5\cdot 10^9$; $x(t)=100$, $x(0)=100+14\cdot\frac{228}{206}=116{,}2$; $t=4{,}5\cdot 10^9\cdot\frac{\lg 1{,}162}{\lg 2}\approx$ $\approx 970\cdot 10^6$ années. 87. La quantité de lumière traversant une couche de x cm est $y(x)=y(0)\cdot 2^{-t/35}$; $y(200)=y(0)\cdot 2^{-40/7}\approx$ $\approx 0{,}02y(0)$; la quantité absorbée est $100\%-2\%=98\%$. 88. La vitesse est $v(t)=50\operatorname{th}\frac{t}{5}$, la distance (en mètres) est $s(t)=$ $=250\ln\operatorname{ch}\frac{t}{5}$; $s(t)=1000$ pour $\operatorname{ch}\frac{t}{5}=e^4$, $t\approx 5(4+\ln 2)\approx 23$ s.

89. La vitesse est $v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}\operatorname{tg}\sqrt{kg}\,(C-t)$, $g=10$, $k=0{,}012$, $C=\frac{1}{\sqrt{kg}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{k}{g}}\,v(0)\approx 1{,}75$; $v(t)=0$ pour $t=C\approx 1{,}75$ s ; la hauteur maximale est $h=\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{k}{g}v^2(0)+1\right)\approx 16{,}3$ m (sans résistance de l'air $t=2$ s, $h=20$ m). 90. La vitesse est $v(t)=$ $=\sqrt{\frac{g}{k}}\operatorname{th}\sqrt{kg}\,t$, la distance est $s(t)=\frac{1}{k}\ln\operatorname{ch}\sqrt{kg}\,t$; $s(t)=$

$=h=16{,}3$ m pour $t=\frac{1}{\sqrt{kg}}\ln\left(e^{kh}+\sqrt{e^{2kh}-1}\right)\approx 1{,}87$ s, $v(t)=$ $=\sqrt{\frac{g}{k}\left(1-e^{-2kh}\right)}\approx 16{,}4$ m/s. **91.** La hauteur du niveau d'eau est $h(t)$; $\sqrt{H}-\sqrt{h}=0{,}3\sqrt{2g}\frac{r^2}{R^2}t$; $h(t)=0$ pour $t=\frac{R^2}{0{,}3r^2}\times$ $\times\sqrt{\frac{H}{2g}}\approx 1050$ s $=17{,}5$ mn. **92.** $(2R-h(t))^{3/2}=0{,}45\pi r^2\times$ $\times\sqrt{2g}\frac{t}{H}$, $h(t)=0$ pour $t=\frac{2RH}{0{,}45\pi r^2}\sqrt{\frac{g}{R}}\approx 1040$ s. **93.** $\sqrt{H}-$ $-\sqrt{h(t)}=kt$, $k=\frac{\sqrt{H}}{5}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $h(t)=0$ pour $t=5\left(2+\sqrt{2}\right)\approx$ ≈ 17 mn. **94.** $H^{5/2}-[h(t)]^{5/2}=\frac{3d^2H^2t}{8R^2}\sqrt{2g}$; $h(t)=0$ pour $t=$ $=(4R^2/3d^2)\sqrt{2H/g}\approx 27$ s. **95.** La quantité d'eau (en litres) dans le réservoir est $x(t)$; $t=\frac{2q}{a^2}\ln\frac{q}{q-a\sqrt{x}}-\frac{2}{a}\sqrt{x}$, $q=1{,}8$, $a=10^{-3/2}$; $x(t)=360$ pour $t=260$ s (pour un réservoir sans orifice au fond $t=200$ s). **96.** L'allongement du bas de la corde de longueur x est $y(x)=\frac{kPx^2}{2l}$, celui de toute la corde est $y(l)=\frac{kPl}{2}$. **97.** A la hauteur de h km la pression atmosphérique est $p(h)=e^{-0{,}12h}$ (kgf/cm²). **98.** La force de tension de l'amarre à une distance φ (mesurée en radians) suivant l'arc à partir du point initial est $f(\varphi)=f(0)\,e^{\varphi/3}$; $f(6\pi)=10e^{2\pi}\approx 5000$ kgf. **99.** La quantité d'eau restante est $m(t)=m_0-v\,(q_1-q_0)\left(1-e^{-\frac{k}{v}t}\right)$, k est le coefficient de proportionnalité. **100.** La combustion d'une masse x de combustible imprime à la fusée une vitesse $v(x)=c\ln\frac{M}{M-x}$; $v(M-m)=c\ln\frac{M}{m}$. **101.** $x+y=Cx^2$; $x=0$. **102.** $\ln(x^2+y^2)=C-2\operatorname{arc\,tg}(y/x)$. **103.** $x(y-x)=Cy$; $y=0$. **104.** $x=\pm y\sqrt{\ln Cx}$; $y=0$. **105.** $y=Ce^{y/x}$. **106.** $y^2-x^2=Cy$, $y=0$. **107.** $\sin\frac{y}{x}=Cx$. **108.** $y=-x\ln\ln Cx$. **109.** $\ln\frac{x+y}{x}=Cx$. **110.** $\ln Cx=\operatorname{cotg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)$; $y=xe^{2\pi k}$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ **111.** $x\ln Cx=2\sqrt{xy}$; $y=0$; $x=0$. **112.** $\arcsin\frac{y}{x}=\ln Cx\cdot\operatorname{sign}x$; $y=\pm x$. **113.** $(y-2x)^3=C\,(y-x-1)^2$; $y=x+1$. **114.** $2x+$ $+y-1=Ce^{2y-x}$. **115.** $(y-x+2)^2+2x=C$. **116.** $(y-x+5)^5\times$ $\times(x+2y-2)=C$. **117.** $(y+2)^2=C\,(x+y-1)$; $y=1-x$. **118.** $y+$ $+2=Ce^{-2\operatorname{arc\,tg}\frac{y+2}{x-3}}$. **119.** $\ln\frac{y+x}{x+3}=1+\frac{C}{x+y}$. **120.** $\sin\frac{y-2x}{x+1}=$ $=C\,(x+1)$. **121.** $x^2=(x^2-y)\ln Cx$; $y=x^2$. **122.** $x=-y^2\ln Cx$; $y=0$. **123.** $x^2y^4\ln Cx^2=1$; $y=0$; $x=0$. **124.** $y^2e^{-1/xy}=C$; $y=0$;

$x=0$. **125.** $(2\sqrt{y}-x)\ln C(2\sqrt{y}-x)=x$; $2\sqrt{y}=x$. **126.** $1-xy=Cx^3(2+xy)$; $xy=-2$. **127.** $2\sqrt{(1/xy^2)-1}=-\ln Cx$; $xy^2=1$; $y=0$. **128.** $\arcsin\frac{y^2}{|x^3|}=\ln Cx^3$; $|x^3|=y^2$. **129.** $x^2y\ln Cy=1$; $y=0$. **130.** a) $y^2=C(x+y)$; $y=-x$; b) $(y+x)^2(y-2x)^4=C(y-x)^3$; $y=x$. **131.** $y=C(x^2+y^2)$. **132.** $x^2+y^2=Cx$. **133.** Pour $\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=1$. **136.** $y=Cx^2+x^4$. **137.** $y=(2x+1)\times(C+\ln|2x+1|)+1$. **138.** $y=\sin x+C\cos x$. **139.** $y=e^x\times(\ln|x|+C)$; $x=0$. **140.** $xy=C-\ln|x|$. **141.** $y=x(C+\sin x)$. **142.** $y=Ce^{x^2}-x^2-1$. **143.** $y+C\ln^2 x-\ln x$. **144.** $xy=(x^3+C)e^{-x}$. **145.** $x=y^2+Cy$; $y=0$. **146.** $x=e^y+Ce^{-y}$. **147.** $x=(C-\cos y)\times\sin y$. **148.** $x=2\ln y-y+1+Cy^2$. **149.** $x=Cy^3+y^2$; $y=0$. **150.** $(y-1)^2x=y-\ln Cy$; $y=0$; $y=1$. **151.** $y(e^x+Ce^{2x})=1$; $y=0$. **152.** $y(x+1)(\ln|x+1|+C)=1$; $y=0$. **153.** $y^{-3}=C\cos^3 x-3\sin x\cos^2 x$; $y=0$. **154.** $y^3=Cx^3-3x^2$. **155.** $y^2=Cx^2-2x$; $x=0$. **156.** $y=x^4\ln^2 Cx$; $y=0$. **157.** $y^{-2}=x^4(2e^x+C)$; $y=0$. **158.** $y^2=x^2-1+C\sqrt{|x^2-1|}$. **159.** $x^2(C-\cos y)=y$; $y=0$. **160.** $xy(C-\ln^2 y)=1$. **161.** $x^2=Ce^{2y}+2y$. **162.** $y^2=C(x+1)^2-2(x+1)$. **163.** $e^{-y}=Cx^2+x$. **164.** $\cos y=(x^2-1)\ln C(x^2-1)$. **165.** $y=2e^x-1$. **166.** $y=-2e^x$. **167.** $y=\frac{2}{x}+\frac{4}{Cx^5-x}$; $y=\frac{2}{x}$. **168.** $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{Cx^{2/3}+x}$; $y=\frac{1}{x}$. **169.** $y=x+\frac{x}{x+C}$; $y=x$. **170.** $y=x+2+\frac{4}{Ce^{4x}-1}$; $y=x+2$. **171.** $y=e^x-\frac{1}{x+C}$; $y=e^x$. **172.** $3x=C\sqrt{|y|}-y^2$; $y=0$. **173.** $xy=Cx^3+2a^2$. **174.** $xy=a^2+Cy^2$. **175.** Dans 20 m ; 3,68 kgf. **176.** Dans 62 jours. **177.** $y=y_1+C(y_2-y_1)$. **178.** $y=\operatorname{tg} x-\sec x$. **179.** b/a. **180.** b/a. **181.** $x(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{s-t}f(s)\,ds=\int_{-\infty}^{0}e^{z}f(z+t)\,dz$. **182.** $y(x)=x\int_{+\infty}^{x}e^{x^2-t^2}\,dt\to-\frac{1}{2}$ pour $x\to+\infty$. **183.** $y(x)=\int_{0}^{\infty}e^{-s-\sin s\cdot\cos(s+2x)}\times\sin(x+s)\,ds$. **186.** $3x^2y-y^3=C$. **187.** $x^2-3x^3y^2+y^4=C$. **188.** $xe^{-y}-y^2=C$. **189.** $4y\ln x+y^4=C$. **190.** $x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=C$. **191.** $x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}=C$. **192.** $x-y^2\cos^2 x=C$. **193.** $x^3+x^3\ln y-y^2=C$. **194.** $x^2+1=2(C-2x)\sin y$. **195.** $2x+\ln(x^2+y^2)=C$. **196.** $x+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}=C$. **197.** $\sqrt{1+y^2}=xy+C$. **198.** $2x^3y^3-3x^2=C$. **199.** $y^2=x^2(C-2y)$; $x=0$. **200.** $(x^2-C)y=2x$. **201.** $x^2+\ln y=Cx^3$; $x=0$. **202.** $y\sin xy=C$. **203.** $\frac{x^2}{2}+xy+\ln|y|=C$; $y=0$. **204.** $-x+1=xy(\operatorname{arc\,tg} y+C)$; $x=0$; $y=0$.

205. $x+2\ln|x|+\frac{3}{2}y^2-\frac{y}{x}=C$; $x=0$. **206.** $\sin\frac{y}{x}=Ce^{-x^2}$. **207.** $\ln|y|-ye^{-x}=C$; $y=0$. **208.** $\ln\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)=2y+C$; $y=0$. **209.** $x^2y\ln Cxy=-1$; $x=0$; $y=0$. **210.** $x^2+y^2=y+Cx$; $x=0$. **211.** $x^2y+\ln|x/y|=C$; $x=0$; $y=0$. **212.** $2xy^2+(1/xy)=C$; $x=0$; $y=0$. **213.** $\ln\left|\frac{x+y}{y}\right|+\frac{y(1+x)}{x+y}=C$; $y=0$; $y=-x$. **214.** $\sin^2 y=Cx-x^2$; $x=0$. **215.** $y=C\ln x^2y$. **216.** $\sin y=-(x^2+1)\ln C(x^2+1)$. **217.** $xy(C-x^2-y^2)=1$; $x=0$; $y=0$. **218.** $y^2=Cx^2e^{x^2y^2}$. **219.** $x\sqrt{1+(y^2/x^2)}+\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+(y^2/x^2)}\right)=C$; $x=0$. **220.** $x^3-4y^2=Cy\sqrt[3]{xy}$; $x=0$; $y=0$. **221.** a) $y_0=0$, $y_1=x^2/2$, $y_2=(x^2/2)-(x^5/20)$. b) $y_0=1$, $y_1=x^3$, $y_2=1+x^3-x+(x^7-1)/7$. c) $y_0=1$, $y_1=1+2x$, $y_2=\frac{1}{2}(e^{2x}+1)+x+x^2$. d) $y_0=2\pi$, $y_1=\pi+x$, $y_2=2\pi+x+x\cos x-\sin x$. **222.** a) $y_0=1$, $z_0=0$; $y_1=x^2$, $z_1=x-1$; $y_2=x^2+(x-1)^2/2$, $z_2=(x^3-1)/3$. b) $x_0=1$, $y_0=2$; $x_1=1+2t$, $y_1=2+t$; $x_2=1+2t+(t^2/2)$, $y_2=2+t+2t^2+(4/3)t^3$ c) $y_0=1$, $y_1=1$, $y_2=1+x^2$. d) $x_0=2$, $x_1=3-t$, $x_2=5-4t+t^3$. **223.** a) $-0{,}5\leqslant x\leqslant 0{,}5$. b) $0{,}87\leqslant x\leqslant 1{,}13$. c) $0{,}8\leqslant t\leqslant 1{,}2$. d) $-0{,}1\leqslant t\leqslant 0{,}1$. **224.** $y_3=\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}-\frac{x^{11}}{4400}$, $|y-y_3|<0{,}00003$. **225.** a) Tout le plan. b) $y\neq 2x$. c) $x\neq 2$, $y>0$. d) $y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ e) $x>0$, $y\neq x$. f) $x\neq 0$, $|y|>|x|$. **226.** Pour $0<a<1$ aux points de l'axe Ox. **228.** a) x_0 et y_0' sont quelconques, $y_0\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$ b) $x_0\neq -1$, $y_0>0$, y_0' est quelconque. c) $x_0\neq y_0$, $x_0y_0>0$, $y_0'\neq 0$, y_0'' est quelconque. d) $x_0\neq y_0'$, $y_0\neq 0$, y_0'' est quelconque. e) t_0 et y_0 sont quelconques, $x_0\neq 0$. f) $t_0>-1$, $x_0\neq 0$, $y_0\neq t_0$. **229.** a) Non. b) Oui. **230.** a) Non. b) Non. c) Oui. **231.** Pas de solutions pour $n=1$, une solution pour $n=2$, une infinité de solutions pour $n=3$. **232.** Pas de solutions pour $n=1$, lorsque $\operatorname{tg}\alpha\neq f(x_0,\ y_0)$, une solution lorsque $\operatorname{tg}\alpha=f(x_0,\ y_0)$; une solution pour $n=2$, une infinité de solutions pour $n\geqslant 3$. **233.** $n\geqslant 5$. **234.** $n\geqslant 4$. **236.** a) 3. b) 2. c) 4. d) 4. e) 3. f) 1. **237.** a) $0\leqslant a\leqslant 1$. b) $a\leqslant\frac{1}{2}$. c) $1\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$. d) $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 0$. **241.** $y=Ce^{\pm x}$. **242.** $y^2=(x+C)^3$; $y=0$. **243.** $y+x=(x+C)^3$; $y=-x$. **244.** $(x+C)^2+y^2=1$; $y=\pm 1$. **245.** $y(x+C)^2=1$; $y=0$. **246.** $y[1+(x-C)^2]=1$; $y=0$; $y=1$. **247.** $(y-x)^2=2C(x+y)-C^2$; $y=0$. **248.** $(x-1)^{4/3}+y^{4/3}=C$. **249.** $4y=(x+C)^2$; $y=Ce^x$. **250.** $y^2(1-y)=(x+C)^2$; $y=1$. **251.** $y=Ce^x$; $y=Ce^{-x}+x-1$. **252.** $x^2y=C$; $y=Cx$. **253.** $x^2+C^2=2Cy$; $y=\pm x$. **254.** $(x+C)^2=4Cy$; $y=0$; $y=x$. **255.** $\ln|1\pm 2\sqrt{2y-x}|=$

$=2\left(x+C\pm\sqrt{2y-x}\right)$; $8y=4x+1$. 256. $4e^{-y/3}=(x+2)^{4/3}+C$. 257. $y=2x^2+C$; $y=-x^2+C$. 258. $y=Cx^{-3}\pm 2\sqrt{x/7}$. 259. $\ln Cy=x\pm 2e^{x/2}$, $y=0$. 260. $\ln Cy=x\pm\sin x$; $y=0$. 261. $\operatorname{arc\,tg} u+\frac{1}{2}\ln|(u-1)/(u+1)|=\pm x+C$, où $u=\sqrt[4]{1-(1/y^2)}$; $y=0$; $y=\pm 1$. 262. $x^2+(Cy+1)^2=1$; $y=0$. 263. $(Cx+1)^2=1-y^2$; $y=\pm 1$. 264. $2(x-C)^2+2y^2=C^2$; $y=\pm x$. 265. $y=Ce^{\pm x}-x^2$. 266. $y^2=C^2x-C$; $4xy^2=-1$. 267. $x=p^3+p$, $4y=3p^4+2p^2+C$. 268. $x=\frac{2p}{p^2-1}$, $y=\frac{2}{p^2-1}-\ln|p^2-1|+C$. 269. $x=p\sqrt{p^2+1}$, $3y=(2p^2-1)\sqrt{p^2+1}+C$. 270. $x=\ln p+(1/p)$, $y=p-\ln p+C$. 271. $x=3p^2+2p+C$, $y=2p^3+p^2$; $y=0$. 272. $x=2\operatorname{arc\,tg} p+C$, $y=\ln(1+p^2)$; $y=0$. 273. $x=\ln|p|\pm\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{p+1}-1}{\sqrt{p+1}+1}\right|\pm 3\sqrt{p+1}+C$, $y=p\pm(p+1)^{3/2}$; $y=\pm 1$. 274. $x=e^p+C$, $y=(p-1)e^p$; $y=-1$. 275. $x=\pm\left(2\sqrt{p^2-1}+\arcsin\frac{1}{|p|}\right)+C$, $y=\pm p\sqrt{p^2-1}$; $y=0$. 276. $x=\pm\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-p}}{1+\sqrt{1-p}}\right|+3\sqrt{1-p}\right)+C$, $y=\pm p\sqrt{1-p}$; $y=0$. 277. $x=\pm 2\sqrt{1+p^2}-\ln\left(\sqrt{p^2+1}\pm 1\right)+C$, $y=-p\pm p\sqrt{p^2+1}$; $y=0$. 278. $4y=C^2-2(x-C)^2$; $2y=x^2$. 279. $x=-\frac{p}{2}+C$, $5y=C^2-\frac{5p^2}{4}$; $x^2=4y$. 280. $\pm xp\sqrt{2\ln Cp}=1$, $y=\mp\left(\sqrt{2\ln Cp}-\frac{1}{\sqrt{2\ln Cp}}\right)$. 281. $pxy=y^2+p^3$, $y^2(2p+C)=p^4$; $y=0$. 282. $y^2=2Cx-C\ln C$; $2x=1+2\ln|y|$. 283. $Cx=\ln Cy$; $y=ex$. 284. $xp^2=C\sqrt{|p|}-1$, $y=xp-x^2p^3$; $y=0$. 285. $2p^2x=C-C^2p^2$, $py=C$; $32x^3=-27y^4$; $y=0$. 286. $y^2=2C^3x+C^2$; $27x^2y^2=1$. 287. $y=Cx-C^2$; $4y=x^2$. 288. $x\sqrt{p}=\ln p+C$, $y=\sqrt{p}(4-\ln p-C)$; $y=0$. 289. $x=3p^2+Cp^{-2}$, $y=2p^3-2Cp^{-1}$; $y=0$. 290. $y=Cx-C-2$. 291. $C^3=3(Cx-y)$; $9y^2=4x^3$. 292. $x=C(p-1)^{-2}+2p+1$, $y=Cp^2(p-1)^{-2}+p^2$; $y=0$; $y=x-2$. 293. $y=Cx-\ln C$; $y=\ln x+1$. 294. $y=\pm 2\sqrt{Cx}+C$; $y=-x$. 295. $2C^2(y-Cx)=1$; $8y^3=27x^2$. 296. $xp^2=p+C$, $y=2+2Cp^{-1}-\ln p$. 297. a) $4y=x^4$; b) $y=0$, $y=-4x$; c) $y=0$, $27y=4x^3$; d) $y=4x$. 298. $xy=\pm a^2$. 299. $x^2+y^2=1$. 300. $x=p(p^2+2)/(\sqrt{p^2+1})^3$, $y=p^2/(\sqrt{p^2+1})^3$ et $x=p/(\sqrt{p^2+1})^3$, $y=(2p^2+1)/(\sqrt{p^2+1})^3$. 301. $y=x(Ce^{-x}-1)$. 302. $(Cx+1)y=Cx-1$; $y=1$. 303. $y(x^2-C)=x$; $y=0$. 304. $x(C-y)=C^2$; $x=4y$. 305. $y(x+C)=x+1$; $y=0$. 306. $x=Cy+y^3$; $y=0$. 307. $y=C$; $y=C\pm e^x$. 308. $y\ln Cx=-x$; $y=0$. 309. $y^2=C(x^2-1)$; $x=\pm 1$. 310. $2y=$

$= 2C(x-1)+C^2$; $2y = -(x-1)^2$. **311.** $x = Cy + \ln^2 y$. **312.** $y = Cx^2e^{-3/x}$. **313.** $(x-C)^2+y^2=C$; $4(y^2-x)=1$. **314.** $4x^2y=(x+2C)^2$; $y=0$. **315.** $x=Ce^y+y^2+2y+2$. **316.** $3y=3C(x-2)+C^3$; $9y^2=4(2-x)^3$. **317.** $y^2=C(xy-1)$; $xy=1$. **318.** $4(x-C)^3=27(y-C)^2$; $y=x-1$. **319.** $x+y=\operatorname{tg}(y-C)$. **320.** $x^3y^2+7x=C$. **321.** $y(xy-1)=Cx$. **322.** $-e^{-y}=\ln C(x-2)$. **323.** $x=y^2(C-2\ln|y|)$; $y=0$. **324.** $3xy=C\pm 4x^{3/2}$. **325.** $y^2\times(Ce^{x^2}+1)=1$; $y=0$. **326.** $y^2=2x\ln Cy$; $y=0$. **327.** $\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arc\,tg}(y/x)=C$. **328.** $(x-1)^2y=x-\ln|x|+C$. **329.** $C^2x^2+2y^2=2C$; $2x^2y^2=1$. **330.** $y\left(C\sqrt{|x^2-1|}-2\right)=1$; $y=0$. **331.** $y^2(Ce^{2x}+x+0{,}5)=1$; $y=0$. **332.** $y^2-1=C(x+1)^4e^{-4x}\times(y^2+1)$; $x=-1$. **333.** $y\sin x-\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}=C$. **334.** $x=3p^2+p^{-1}$, $y=2p^3-\ln|p|+C$. **335.** $3y^2=2\sin x+C\sin^{-2}x$. **336.** $x(e^y+xy)=C$. **337.** $x(p-1)^2=\ln Cp-p$, $y=xp^2+p$; $y=0$; $y=x+1$. **338.** $(x+1)y=x^2+x\ln Cx$. **339.** $y^2+\sqrt{x^4+y^4}=C$. **340.** $px=C\sqrt{p}-1$, $y=\ln p-C\sqrt{p}+1$. **341.** $y=x\operatorname{tg}\ln Cx$; $x=0$. **342.** $y^{2/3}=Ce^{2x}+(x/3)+(1/6)$; $y=0$. **343.** $x=Ce^{\sin y}-2(1+\sin y)$. **344.** $Cy=C^2e^x+1$; $y=\pm 2e^{x/2}$. **345.** $y^2=(x^2+C)e^{2x}$. **346.** $y=Cx-\sqrt[3]{C^3-1}$; $y^3=(x^{3/2}\pm 1)^2$. **347.** $x\times(y^2-1)^2=y^3-3y+C$; $y=\pm 1$. **348.** $\sqrt{y-x}-\sqrt{x}=C$; $y=x$. **349.** $x\sqrt{y}=\sin x+C$; $y=0$. **350.** $x=4p^3-\ln Cp$, $y=3p^4-p$; $y=0$. **351.** $y^2+2x^2\ln Cy=0$; $y=0$. **352.** $4x+y-3=2\operatorname{tg}(2x+C)$. **353.** $xy\cos x-y^2=C$. **354.** $4Cxy=C^2x^4-1$. **355.** $xy(\ln^2 x+C)=1$. **356.** $2\sqrt{y-x^2}=x\ln Cx$; $y=x^2$. **357.** $(y^2/2)-(1/x)-xy=C$; $x=0$. **358.** $x=Cy^2-y^2(y+1)e^{-y}$; $y=0$. **359.** $y(\ln y-\ln x-1)=C$. **360.** $x=2p-\ln p$, $y=p^2-p+C$. **361.** $2x^3-x^2y^2+y^3+x=C$. **362.** $(y-4x+2)^4(2y+2x-1)=C$. **363.** $y^3=(C-x^3)\sin^3 x$. **364.** $p^2x=p\sin p+\cos p+C$, $py=p\sin p+2\cos p+2C$; $y=0$. **365.** $x^2y^2-1=xy\ln Cy^2$; $y=0$. **366.** $y=C\cos x+\sin x$. **367.** $|x|=\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)+C$; $x=0$. **368.** $(y-x)^2=2C(x+y)-C^2$; $y^{2/3}-x^{2/3}=C$; $y=0$. **369.** $27(y-2x)^2=(C-2x)^3$; $y=2x$. **370.** $\sin(y/x)=-\ln Cx$. **371.** $x^2\left(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2}\right)=C$. **372.** $3\sqrt{y}=x^2-1+C\sqrt[4]{|x^2-1|}$; $y=0$. **373.** $x=\frac{C}{p^2}-p-\frac{3}{2}$, $y=C\left(\frac{2}{p}-1\right)-\frac{p^2}{2}$; $y=x+2$; $y=0$. **374.** $(2x+3y-7)^3=Ce^{x+2y}$. **375.** $(x^2+y+\ln Cy)y=x$; $y=0$. **376.** $x=2\sqrt{p^2+1}-\ln\left(1+\sqrt{p^2+1}\right)+\ln Cp$, $y=p\sqrt{p^2+1}$; $y=0$. **377.** $y^2=C\ln^2 x+2\ln x$. **378.** $x=Cue^u$, $4y=C^2e^{2u}(2u^2+2u+1)$; $x^2=2y$. **379.** $xy^2\ln Cxy=1$; $x=0$; $y=0$. **380.** $x^2\sin^2 y=2\sin^3 y+C$. **381.** $1-xy=(Cx-1)^2$; $xy=1$. **382.** $xe^y=e^x+C$. **383.** $\sin(y-2x)-2\cos(y-2x)=Ce^{x+2y}$. **384.** $y=(2x+C)\sqrt{x^2+1}-x^2-Cx-2$. **385.** $(y+x^2)^2\times$

$\times (2y - x^2) = C$. **386.** $(x-1)^2 = y^2(2x - 2\ln Cx)$; $y = 0$. **387.** $x = p[\ln(1+\sqrt{p^2+1}) - \ln Cp]$, $2y = xp - \sqrt{p^2+1}$; $2y = -1$. **388.** $(y+3x+7)(y-x-1)^3 = C$. **389.** $\sin y = Ce^{-x} + x - 1$. **390.** $y = C^2(x-C)^2$; $16y = x^4$. **391** $y^2 = x - (x+1)\ln C(x+1)$. **392.** $e^y = x^2 \ln Cx$. **393.** $(y - 2x\sqrt{y-x^2})(2\sqrt{y-x^2} + x) = C$. **394.** $xy^2 = \ln x^2 - \ln Cy$; $x = 0$, $y = 0$. **395.** $x(y^2+x^2)^3 = \frac{2}{5}y^5 + \frac{4}{3}x^2y^3 + 2x^4y + Cx^5$; $x = 0$. **396.** $(u-1)\ln Cx^6(u-1)^5(u+2)^4 = 3$, où $u^3 = (y^2/x^2) - 2$; $y^2 = 3x^2$. **397.** $\sqrt{y} = (x^2-1)(2\ln|x^2-1| + C)$; $y = 0$. **398.** $x^2 - (x-1)\ \ln(y+1) - y = C$. **399.** $\operatorname{tg} y = x^2 + Cx$; $y = (2k+1)\pi/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **400.** $y^2 = Cx^2 + C^2$. **401.** $x^3 = Ce^y - y - 2$. **402.** $y + 1 = x\ln C(y+1)$; $y = -1$. 403. $y^2 = 2C^2(x-C)$; $8x^3 = 27y^2$. **404.** $x^6 = y^3(C - y\ln y + y)$; $y = 0$. **405.** $\ln C(u-v)^3\left(u^2 + uv + \frac{v^2}{3}\right)^2 = 2\operatorname{arctg}\frac{2u+v}{v}$, où $u^3 = y$, $v^2 = x$; $y^2 = x^3$. **406.** $(y-1)^2 = x^2 + Cx$. **407.** $(x^2+y^2)(Cx+1) = x$. **408.** $3x + y^3 - 1 = \operatorname{tg}(3x + C)$. **409.** $(C - x^2)\sqrt{y^2+1} = 2x$. **410.** $(x^2+y^2+1)^2 = 4x^2 + C$. **411.** $xy - x = y(y-x)\ln|Cy/(y-x)|$; $x = 0$; $y = 0$; $y = x$. **412.** $y = \pm x \operatorname{ch}(x+C)$; $y = \pm x$. **413.** $\sqrt{y^2+1} = x(Ce^x - 1)$. **414.** $(y-x)\ln C\frac{x-1}{x+1} = 2$; $y = x$. **415.** $(Ce^{x^2} + 2x^2 + 2)\cos y = 1$. **416.** $(y^2 - Cx^2 + 1)^2 = 4(1-C)y^2$; $y = \pm x$. **417.** $y^2 + xy - 1 = Ce^{x^2/2}$. **418.** $6x^3y^4 + 2x^3y^3 + 3x^2y^4 = C$. **419.** $x + \frac{1}{x} + y^2 - 2y + 2 = Ce^{-y}$; $x = 0$. **420.** $e^y(C^2x^2+1) = 2C$; $x^2 = e^{-2y}$. **421.** $C_1x - C_1^2y = \ln|C_1x+1| + C_2$; $2y = x^2 + C$; $y = C$. **422.** $9C_1^2 \times (y - C_2)^2 = 4(C_1x+1)^3$; $y = \pm x + C$. **423.** $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$. **424.** $y^3 = C_1(x+C_2)^2$; $y = C$. **425.** $y = C_1\operatorname{tg}(C_1x + C_2)$; $\ln\left|\frac{y-C_1}{y+C_1}\right| = 2C_1x + C_2$; $y(C-x) = 1$; $y = C$. **426.** $C_1y = \pm\sin(C_1x + C_2)$; $C_1y = \pm\operatorname{sh}(C_1x+C_2)$; $y = C \pm x$. **427.** $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$. **428.** $y = C_3 - (x+C_1)\ln C_2(x+C_1)$; $y = C_1x + C_2$. **429.** $y + C_1\ln|y| = x + C_2$; $y = C$. **430.** $2y = C_1\cos 2x + (1 + 2C_1)x^2 + C_2x + C_3$. **431.** $y = C_1[1 \pm \operatorname{ch}(x + C_2)]$; $y = Ce^{\pm x}$. **432.** $x = C_1p + 3p^2$; $y = \frac{12}{5}p^5 + \frac{5}{4}C_1p^4 + C_1^2\frac{p^3}{6} + C_2$; $y = C$. **433.** $y = C_1\frac{x^2}{2} - C_1^2x + C_2$; $y = (x^3/12) + C$. **434.** $e^y + C_1 = (x + C_2)^2$. **435.** $y = C_1(x+2)e^{-x} + C_2x + C_3$. **436.** $y = \pm\operatorname{ch}(x + C_1) + C_2$. **437.** $e^y\sin^2(C_1x + C_2) = 2C_1^2$; $e^y\operatorname{sh}^2(C_1x+C_2) = 2C_1^2$; $e^y(x+C)^2 = 2$. **438.** $y = C_1\frac{x^3}{6} - C_1^3\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$; $y = \frac{\pm 8}{315}x^3\sqrt{3x} + C_1x + C_2$. **439.** $3C_1y = (x - C_1)^3 + C_2$; $y = C$; $y = C - 2x^2$. **440.** $\ln|y^2 + C_1 \pm$

$\pm\sqrt{y^4+2C_1y^2+1}\,|=2x+C_2$; $y=\pm 1$. **441.** $x=3C_1p^2+\ln C_2p$, $y=2C_1p^3+p$; $y=C$. **442.** $x=C_1e^p-2p-2$, $y=C_1(p-1)e^p-p^2+C_2$. **443.** $12(C_1y-x)=C_1^2(x+C_2)^3+C_3$. **444.** $y=C_1\times\times\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|\right)+x^2+C_2$; $y=C_1\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+x^2+C_2$. **445.** $\ln y=C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$; $\ln|(\ln y-C_1)/(\ln y+C_1)|=2C_1x+C_2$; $(C-x)\ln y=1$; $y=C$. **446.** $x=u-\ln|1+u|+C_2$, où $u=\pm\sqrt{1+4C_1y}$; $y=C$; $y=Ce^{-x}$. **447.** $C_1^2y=(C_1^2x^2+1)\operatorname{arc\,tg} C_1x-C_1x+C_2$; $2y=k\pi x^2+C$, $k=0$, ± 1, ± 2, ... **448.** $x=\ln|p|+2C_1p-C_2$, $y=p+C_1p^2+C_3$; $y=C_1x+C_2$. **449.** $C_1^2y+1=\pm\operatorname{ch}(C_1x+C_2)$; $C_1^2y-1=\sin(C_1x+C_2)$; $2y=(x+C)^2$; $y=0$. **450.** $y=C_2-\ln\left|\cos\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)\right|$. **451.** $6y=x^3\ln|x|+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$. **452.** $y=x\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt+\cos x+C_1x+C_2$. **453.** $y=C_1\left[x\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt-\frac{1}{2}(e^{x^2}-1)\right]+C_2x+C_3$.

454. $y=\frac{x^2}{2}\int\limits_1^x\frac{e^t}{t}\,dt-\frac{x+1}{2}e^x+C_1x^2\ln|x|+C_2x^2+C_3x+C_4$.

455. $C_2y^2-C_1=C_2^2(x+C_3)^2$; $y=C$. **456.** $C_1y=\ln|C_1x+C_2|+C_3$; $y=C_1x+C_2$. **457.** $C_1y-1=C_2e^{C_1x}$; $y=C-x$; $y=0$. **458.** $y=\pm\sqrt{C_1x+C_2}+C_3x+C_4$; $y=C_1x^2+C_2x+C_3$. **459.** $y^2=x^2+C_1x+C_2$. **460.** $y=e^{x^2/2}\left(C_1\int e^{-x^2/2}\,dx+C_2\right)-1$. **461.** $y=C_1\times\operatorname{tg}(C_1\ln C_2x)$; $C_2(y+C_1)|x|^{2C_1}=y-C_1$; $y\ln Cx=-1$. **462.** $y=4C_1\operatorname{tg}(C_1x^2+C_2)$; $2\ln\left|\frac{y-C_1}{y+C_1}\right|=C_1x^2+C_2$; $y(C-x^2)=4$; $y=C$. **463.** $y=C_2e^{Cx^2}$. **464.** $\ln C_2y=4x^{5/2}+C_1x$; $y=0$. **465.** $y=C_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{C_1}$. **466.** $y^2=C_1x^3+C_2$. **467.** $y=C_2xe^{-C_1/x}$. **468.** $y=C_2|x|^{C_1-(1/2)\ln|x|}$. **469.** $y=C_2\left|\frac{x}{x+C_1}\right|^{1/C_1}$; $y=C$; $y=Ce^{-1/x}$. **470.** $|y|^{C_1^2+1}=C_2\left(x-\frac{1}{C_1}\right)|x+C_1|^{C_1^2}$; $y=C$. **471.** $y=C_2x(\ln C_1x)^2$; $y=Cx$. **472.** $\ln|y|=\ln|x^2-2x+C_1|+\int\frac{2dx}{(x-1)^2+C_1-1}+C_2$; $y=C$. **473.** $4C_1y^2=4x+x(C_1\ln C_2x)^2$. **474.** $y=-x\ln(C_2\ln C_1x)$; $y=Cx$. **475.** $\frac{y}{x}=C_2-3\ln\left|\frac{1}{x}-C_1\right|$; $y=Cx$. **476.** $x^2y=C_1\operatorname{tg}(C_1\ln C_2x)$, $C_2(x^2y+C_1)|x|^{2C_1}=x^2y-C_1$; $x^2y\ln Cx=-1$. **477.** $4(C_1y-1)=C_1^2\ln^2C_2x$. **478.** $Cy=x^{3/2}\times$

$\times (C_2x^C+2)$; $y=Cx^{3/2}$; $y=-2x^{3/2}\ln Cx$. **479.** $2C_2x^2y=(C_2x-C_1)^2-1$; $xy=\pm 1$. **480.** $2C_1C_2y=C_2^2|x|^{2+C_1}+|x|^{2-C_1}$. **501.** $(3-x)y^5=8(x+2)$. **502.** $y(x+2)=-x-6$. **503.** $(1-\ln x)^2\times y=x^2$. **504.** $y=3\,\mathrm{th}^2\frac{x\sqrt{3}}{2}-2$. **505.** $\ln\mathrm{tg}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=2x+2$. **506.** a) $4(C_1y-1)=C_1^2(x+C_2)^2$; b) $y\sqrt{(C_1/y)-1}+C_1\arccos\sqrt{y/C_1}=C_2\pm x$. **507.** $y=C_2-k\ln\cos\left(\frac{x}{k}+C_1\right)$. **508.** $y=\frac{p}{2T}x^2+C_1x+C_2$, p est la charge par unité de longueur de la projection horizontale, T est la composante horizontale de la force de tension du fil. **509.** $ay=\mathrm{ch}(ax+C_1)+C_2$; $a=q/T$, q est le poids d'une unité de longueur du fil, pour T voir la réponse au problème nº 508. **511.** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. **512.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$. **513.** $y=C_1+C_2e^{2x}$. **514.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{x/2}$. **515.** $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. **516.** $y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$. **517.** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. **518.** $y=C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\cos x\sqrt{3}+C_3\sin x\sqrt{3})$. **519.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$. **520.** $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$. **521.** $y=e^{x\sqrt{3}}\times(C_1\cos x+C_2\sin x)+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x+e^{-x\sqrt{3}}(C_5\cos x+C_6\sin x)$. **522.** $y=e^x(C_1+C_2x)$. **523.** $y=e^{-x/2}(C_1+C_2x)$. **524.** $y=C_1+C_2x+C_3x^2+e^{3x}(C_4+C_5x)$. **525.** $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}+C_4e^{3x}+C_5e^{-3x}$. **526.** $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$. **527.** $y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2)$. **528.** $y=e^x(C_1+C_2x)+C_3e^{-x}$. **529.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$. **530.** $y=C_1+(C_2+C_3x)\cos 2x+(C_4+C_5x)\sin 2x$. **531.** $y=e^x(C_1+C_2x)+C_3e^{-2x}$. **532.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos x\sqrt{3}+C_4\sin x\sqrt{3}$. **533.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+(1/5)e^{4x}$. **534.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+(2x-2)e^x$. **535.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+xe^x+x^2+2$. **536.** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)e^x$. **537.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+0{,}1\sin x+0{,}3\cos x$. **538.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x$. **539.** $y=C_1e^x+C_2e^{4x}-(2x^2-2x+3)e^{2x}$. **540.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+(0{,}1x-0{,}12)\cos x-(0{,}3x+0{,}34)\sin x$. **541.** $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}-\frac{x}{5}e^{-4x}-\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)e^{-x}$. **542.** $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}+\left(\frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{16}+\frac{x}{32}\right)e^x$. **543.** $y=e^{2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+0{,}25e^{2x}+0{,}1\cos 2x+0{,}05\sin 2x$. **544.** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+e^{3x}\left(\frac{6}{37}\sin x-\frac{1}{37}\cos x\right)$. **545.** $y=(C_1+C_2x+x^3)e^x$.

546. $y=\left(C_1-\frac{x^2}{4}\right)\cos x+\left(C_2+\frac{x}{4}\right)\sin x$. 547. $y=(C_1+C_2x)\times$ $\times e^{-2x}+\left(\frac{x}{16}-\frac{1}{32}\right)e^{2x}$. 548. $y=C_1+C_2e^{5x}-0{,}2x^3-0{,}12x^2-$ $-0{,}048x+0{,}02(\cos 5x-\sin 5x)$. 575. $y=e^x(x\ln|x|+C_1x+C_2)$. 576. $y=(e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1)+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$. 577. $y=(C_1+$ $+\ln|\sin x|)\sin x+(C_2-x)\cos x$. 578. $y=\sin 2x\ln|\cos x|-x\cos 2x+$ $+C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$. 579. $y=e^{-x}\left(\frac{4}{5}(x+1)^{5/2}+C_1+C_2x\right)$.
580. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{\cos 2x}{\cos x}$. 581. $y=-\frac{1}{x}+C_1e^x+C_2e^{-x}$.
582. $y=(7-3x)e^{x-2}$. 583. $y=2\cos x-5\sin x+2e^x$. 584. $y=$ $=e^{2x-1}-2e^x+e-1$. 585. $y=e^{-x}(x-\sin x)$. 586. $y=2+e^{-x}$.
587. $y=(x-1)(e^{2x}-e^{-x})$. 588. $y=x-x\sin x-2\cos x$.
589. $y=C_1x^2+C_2x^3$. 590. $y=C_1x^3+C_2x^{-1}$. 591. $y=x(C_1+C_2\ln|x|+$ $+C_3\ln^2|x|)$. 592. $y=C_1+C_2\ln|x|+C_3x^3$. 593. $y=x(C_1+$ $+C_2\ln|x|)+2x^3$. 594. $y=C_1\cos(2\ln|x|)+C_2\sin(2\ln|x|)+2x$.
595. $y=C_1x^2+\frac{1}{x}\left(C_2-\frac{2}{3}\ln x-\ln^2 x\right)$. 596. $y=x^2(C_1\cos\ln|x|+$ $+C_2\sin\ln|x|+3)$. 597. $y=C_1x^3+C_2x^{-2}+x^3\ln|x|-2x^2$.
598. $y=C_1x^2+C_2x^{-1}+0{,}1\cos\ln x-0{,}3\sin\ln x$. 599. $y=(x-2)^2\times$ $\times(C_1+C_2\ln|x-2|)+x-1{,}5$. 600. $y=C_1\left(x+\frac{3}{2}\right)+C_2\times$ $\times\left|x+\frac{3}{2}\right|^{3/2}+C_3\left|x+\frac{3}{2}\right|^{1/2}$. 601. $y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^2}{4}\right)e^{-x}+$ $+\frac{11}{8}e^x$. 602. $y=\frac{1-x}{16}e^{3x}-\frac{1+x}{16}e^{-x}+\left(\frac{x^3}{12}+C_1x+C_2\right)e^x$.
603. $y=C_1e^{(-1+i)x}+[C_2+(i-1)x]e^{(1-i)x}-e^{(1+i)x}$. 604. $y=(2x^2+$ $+C_1x+C_2)e^{-ix}-e^{ix}$. 605. $y=C_1e^{(\sqrt{3}+i)x}+C_2e^{(i-\sqrt{3})x}+\left(C_3-\right.$ $\left.-\frac{x}{24}\right)e^{-2ix}+\frac{i}{32}e^{2ix}$. 606. $y=\frac{C_1}{x}+\left[C_2-\frac{1}{3}\ln(-x)+\frac{1}{2}\times\right.$ $\left.\times\ln^2(-x)\right]x^2$. 607. $y=(C_1+C_2x+x\ln|x|)e^{-x}+\frac{x-1}{4}e^x$.
608. $y=e^{-x}\left[\frac{1}{8}+\left(C_1-\frac{x}{2}\right)\cos 2x+\left(C_2+\frac{x}{8}+\frac{1}{2}\ln|\cos x|\right)\sin 2x\right]$.
609. $y=x^2\ln\frac{C_1x}{x+1}-\frac{x}{2}+1-\frac{1}{x}\ln C_2(x+1)$. 610. $y=x[C_1+$ $+(C_2+\ln|\ln x|)\ln x]+\frac{1+\ln x}{4x}$. 611. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+$ $+\int_0^x\sin(x-s)f(s)\,ds$. 612. $\int_0^x f(s)\cos s\,ds$ et $\int_0^x f(s)\sin s\,ds$ sont bornées pour $x\to+\infty$. 613. $y'''-3y''+3y'-y=0$. 614. $y''-$

$-4y'+5y=0$. **615.** $y^{IV}+2y''+y=0$. **616.** $y^{IV}-4y'''+14y''-20y'+25=0$. **617.** $y'''-y''-y'+y=0$. **618.** $y^{IV}+y''=0$. **619.** $a=0$, $b>0$. **620.** $a>0$, $b>0$. **621.** $b<0$ ou $b\geqslant 0$, $a>0$. **622.** $b>0$, $a\leqslant -2\sqrt{b}$. **623.** $a^2<4b$. **624.** $a>2, b>a-1$. **625.** $a=2\sqrt{b}$. **626.** $\omega\neq\pm k$. **627.** $x=\frac{(b-\omega^2)\sin\omega t-a\omega\cos\omega t}{(b-\omega^2)^2+a^2\omega^2}$; l'amplitude est $A=\frac{1}{\sqrt{(b-\omega^2)^2+a^2\omega^2}}$; max A s'obtient pour $\omega^2=b-\frac{a^2}{2}$. **628.** $x=\frac{e^{i\omega t}}{4-\omega^2+i\omega}$. **629.** $x(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{e^{\lambda_1(t-s)}-e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1-\lambda_2}\times f(s)\,ds=\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{\lambda_1 z}-e^{\lambda_2 z}}{\lambda_1-\lambda_2}f(t-z)\,dz$; $|x(t)|\leqslant\frac{m}{b}$. **630.** $2\pi\times\sqrt{\frac{m}{k}}$. **631.** Si $h^2>4km$, $x=\frac{v_0}{2\gamma}(e^{(-\alpha+\gamma)t}-e^{(-\alpha-\gamma)t}$, $\alpha=\frac{h}{2m}$, $\gamma=\frac{\sqrt{h^2-4km}}{2m}$. Si $h^2<4km$, $x=\frac{v_0}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t$, $\alpha=\frac{h}{2m}$, $\beta=\frac{\sqrt{4km-h^2}}{2m}$. **632.** $x(t)=\frac{b(k-m\omega^2)\sin\omega t-bh\omega\cos\omega t}{(k-m\omega^2)^2+h^2\omega^2}$. **633.** $A=\frac{kB}{k-m\omega^2}$. **634.** $x=4-2\cos t$. **635.** $I=\frac{V}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$. **636.** $I=\frac{V}{R}e^{-t/RC}$. **637.** $I=\frac{q}{RC}e^{-t/RC}$. **638.** $I=\frac{q}{\omega CL}e^{-Rt/2L}\sin\omega t$, $CR^2<4L$, $\omega=\frac{\sqrt{4CL-R^2C^2}}{2LC}$. **639.** $I=A\sin(\omega t-\varphi)$. $A=\frac{V}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$, $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L}{R}$. **640.** $I=A\sin(\omega t-\varphi)$, $A=\frac{V}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$, $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$; max $A=\frac{V}{R}$ pour $\omega^2=\frac{1}{LC}$. **641.** Non. **642.** Oui. **643.** Non. **644.** Non. **645.** Oui. **646.** Non. **647.** Oui. **648.** Non. **649.** Non. **650.** Oui. **651.** Non. **652.** Oui. **653.** Oui. **654.** Oui. **655.** Non. **656.** Non. **657.** Oui. **658.** Non. **659.** Oui. **660.** Non. **661.** Oui. **662.** Non. **663.** a) Non. b) Non. **664.** Linéairement indépendantes. **665.** Peuvent être linéairement dépendantes ou indépendantes. **666.** a) $W\equiv 0$; b) on ne peut rien dire. **667.** Linéairement indépendantes. L'équation ne remplit pas les conditions du théorème. **669.** Deux. **670.** a) $-1<x<\infty$, b) $\frac{3}{2}\pi<x<\frac{5}{2}\pi$. **671.** Peuvent pour $n\geqslant 2$. b) Peuvent pour $n\geqslant 3$. **672.** $n\geqslant 4$. **673.** $n\geqslant 2$. **674.** $y''-$

$-y'\cot g\, x=0$. **675.** $(x-1)\,y''-xy'+y=0$. **676.** $y'''-y''=0$. **677.** $(2x^2+6x-9)\,y''-(4x+6)\,y'+4y=0$. **678.** $y''-y=0$. **679.** $(x^2-2x+2)\,y'''-x^2y''+2xy'-2y=0$. **680.** $x^2y''-3xy'+3y=0$. **681.** $y=C_1x+C_2e^{-2x}$. **682.** $y=C_1\left(1+\frac{1}{x}\right)+C_2\left(\frac{x}{2}+1-\frac{x+1}{x}\times\right.$ $\left.\times\ln|x+1|\right)$. **683.** $y=e^x(C_1x^2+C_2)$. **684.** $xy=C_1e^{-x}+C_2e^x$. **685.** $y=C_1\,\mathrm{tg}\,x+C_2(1+x\,\mathrm{tg}\,x)$. **686.** $y=C_1(1+x\ln|x|)+C_2x$. **687.** $y=C_1(e^x-1)+\frac{C_2}{e^x+1}$. **688.** $y=C_1x+C_2(\ln x+1)$. **689.** $y=$ $=C_1\sin x+C_2\left(2-\sin x\cdot\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$. **690.** $y=C_1(x-3)+$ $+\frac{C_2}{x+1}$. **691.** $y=C_1e^{2x}+C_2(3x+1)\,e^{-x}$. **692.** $y=(C_1+C_2x)\,e^{-x^2}$. **693.** $y=C_1(2x+1)+C_2e^{2x}$. **694.** $y=C_1(x+1)+C_2x^{-1}$. **695.** $y=$ $=C_1(x+2)+C_2x^2$. **696.** $y=C_1(x^2+2)+C_2x^3$. **697.** $y=C_1\times$ $\times(x^2+1)+C_2[x+(x^2+1)\,\mathrm{arc\,tg}\,x]$. **698.** $y=C_1\sqrt{|x|}+C_2\times$ $\times(x-2)$. **699.** $y=C_1x+C_2e^x+C_3e^{-x}$. **700.** $y=C_1x+C_2x^{-1}+$ $+C_3(x\ln|x|+1)$. **701.** $y=C_1x+C_2e^x+C_3(x^2-1)$. **702.** $y=$ $=C_1(x+2)+\frac{C_2}{x}+\left(\frac{x}{2}+1\right)\ln|x|+\frac{3}{2}$. **703.** $y=C_1(2x-1)+$ $+C_2e^{-x}+\frac{x^2+1}{2}$. **704.** $y=\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{x-1}+x$. **705.** $y=C_1\times$ $\times(x^2+1)+C_2x^{-1}+2x$. **706.** $z''+z=0$. **707.** $z''-z=0$. **708.** $z''=0$. **709.** $x^2z''-2z=0$. **710.** $4x^2z''+(4x^2+1)\,z=0$. **711.** $y''_{tt}-$ $-y=0$. **712.** $y''_{tt}+y=0$. **713.** $(t^2-1)\,y''_{tt}-2y=0$. **714.** $y''_{tt}+$ $+t^2y=0$. **715.** $8y''_{tt}+t^2y=0$. **716.** $y=1+C_1(x-1)+C_2(x^2-1)$. **717.** $\int p(x)\,dx\to+\infty$ pour $x\to+\infty$. **719.** Sur les droites $y=0$ et $x=x_i$, où $q(x_i)=0$. **720.** a) Non. b) Oui. c) Non. d) Non. **726.** $\pi/\sqrt{m}$; $[(b-a)\sqrt{m}/\pi]$ zéros ou encore un zéro de plus (les crochets signifient la partie entière du nombre). **727.** $0{,}33<d<0{,}5$. **728.** $15{,}7<d<32$. **729.** $0{,}49<d<1$. **730.** $0{,}15<d<1{,}2$. **737.** $u''_{tt}+(\pm1+\psi^3\psi''_{xx})\,u=0$, $t=\int\frac{dx}{(\psi(x))^2}$, $y=\psi u$.

La solution y_2 non indiquée dans certaines réponses aux problèmes n^os^ **738** à **750** se déduit de y_1 par substitution de cos à sin. **738.** $y_1=\frac{1}{x}\cos\frac{x^3}{3}+O(1/x^4)$. **739.** $y_{1,2}=x^{-1/2}e^{\pm x^2/2}\times$ $\times(1+O(x^{-2}))$. **740.** $y_1=\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{x^2}{2}+O\left(x^{-\frac{5}{2}}\right)$. **741.** $y_1=e^{-x/2}\times$

$\times \cos e^x + O(e^{-3/2x})$. 742. $y_{1,2} = x^{1/4} e^{\pm 2\sqrt{x}} (1 + O(x^{-\frac{1}{2}}))$. 743. $y_{1,2} = x^{-1/4} e^{\pm\frac{2}{3}x^{3/2}} (1 + O(x^{-3/2}))$. 744. $y_1 = x^{-3/4} \cos 2\sqrt{x} + O(x^{-5/4})$. 745. $y_1 = e^{(x-1)^2/2} \left[(2x)^{-1/4} \cos \frac{(2x)^{3/2}}{3} + O(x^{-7/4}) \right]$. 746. $y_1 = \frac{1}{x} \cos \frac{x^3}{3} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. 747. $y_{1,2} = x^{(1\pm\sqrt{5})/2} (1 + O(x^{-2}))$. 748. $y_1 = \sqrt{\frac{x}{\ln x}} \left[\cos\left(\frac{1}{2}\ln^2 x - \frac{1}{8}\ln\ln x\right) + O(\ln^{-2} x)\right]$. 749. $y_{1,2} = \left[1 \pm \frac{3}{32x^2} + \frac{105}{2048x^4} + O(x^{-6})\right] \frac{e^{\pm x^2}}{\sqrt{2x}}$. 750. $y_1 = x^{1/4} \left(1 + \frac{3}{64x}\right) \cos\left(2\sqrt{x} + \frac{3}{16\sqrt{x}}\right) + O(x^{-5/4})$. 751. $y = (\operatorname{sh} x/\operatorname{sh} 1) - 2x$. 752. $y = x + e^{-x} - e^{-1}$. 753. $y = e^x - 2$. 754. $y = 1 - \sin x - \cos x$. 755. Pas de solutions. 756. $y = 2x - \pi + \pi\cos x + C\sin x$, C est arbitraire. 757. $y = -2e^{-x}$. 758. $y = e^{-x} - 1$. 759. $y = -e^{(-1-i)x}$. 760. $y = 2x^3$. 761. $y = 3x^2$. 762. $y = -x^{-3}$. 763. $a = (2n-1)^2\pi^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ 764. $G = (s-1)x$ $(0 \leqslant x \leqslant s)$, $G = s(x-1)$ $(s \leqslant x \leqslant 1)$. 765. $G = \sin s \cos x$ $(0 \leqslant x \leqslant s)$, $G = \cos s \sin x$ $(s \leqslant x \leqslant \pi)$. 766. $G = e^s(e^{-x} - 1)$ $(0 \leqslant x \leqslant s)$, $G = 1 - e^s$ $(s \leqslant x \leqslant 1)$. 767. $G = -e^{-s}\operatorname{ch} x$ $(0 \leqslant x \leqslant s)$, $G = -e^{-x}\operatorname{ch} s$ $(s \leqslant x \leqslant 2)$. 768. $G = \frac{1}{2}\sin|x-s|$. 769. $G = \frac{1}{x} - 1$ $(1 \leqslant x \leqslant s)$, $G = \frac{1}{s} - 1$ $(s \leqslant x \leqslant 3)$. 770. $G = \frac{s^2-4}{2s^2}$ $(1 \leqslant x \leqslant s)$, $G = \frac{x^2-4}{2s^2}$ $(s \leqslant x \leqslant 2)$. 771. $G = \frac{1-x^3}{3s^3x}$ $(1 \leqslant x \leqslant s)$, $G = \frac{1-s^3}{3s^3x}$ $(s \leqslant x \leqslant 2)$. 772. $G = -x$ $(0 \leqslant x \leqslant s)$, $G = -s$ $(s \leqslant x < \infty)$. 773. $G = -1$ $(0 \leqslant x \leqslant s)$, $G = -e^{s-x}$ $(s \leqslant x < \infty)$. 774. $G = -\ln x$ $(1 \leqslant x \leqslant s)$, $G = -\ln s$ $(s \leqslant x < \infty)$. 775. $G = \frac{1}{2}e^s(e^{-3x} - e^{-x})$ $(0 \leqslant x \leqslant s)$, $G = \frac{1}{2}e^{-3x}(e^s - e^{3s})$ $(s \leqslant x < \infty)$. 776. $G = (1-x^2)/2s^2x$ $(1 \leqslant x \leqslant s)$, $G = (1-s^2)/2s^2x$ $(s \leqslant x < \infty)$. 777. $G = x(s^3-1)/3s^2$ $(0 \leqslant x \leqslant s)$, $G = s(x^3-1)/3x^2$ $(s \leqslant x \leqslant 1)$. 778. $G = -(1/2)e^{-|x-s|}$. 779. $G = -x^2/3s^3$ $(0 \leqslant x \leqslant s)$, $G = -1/3x$ $(s \leqslant x < \infty)$. 780. $a \neq k^2\pi^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ 781. $-\frac{m}{2} \leqslant y \leqslant 0$, $-\frac{m}{3x} \leqslant y' \leqslant \frac{m}{3x}$. 782. $\lambda_k = -k^2\pi^2/l^2$, $y_k = \sin(k\pi x/l)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ 783. $\lambda_k = -k^2\pi^2/l^2$, $y_k = \cos(k\pi x/l)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ 784. $\lambda_k = -\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}$, $y_k = \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

785. $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{\ln a}\right)^2 - \frac{1}{4}$, $y_k = \sqrt{x} \sin \frac{k\pi \ln x}{\ln a}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$
786. $x = C_1e^t + C_2e^{5t}$, $y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$. 787. $x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$, $y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}$. 788. $x = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t}$, $y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$. 789. $x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$, $y = e^{2t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1) \times \sin t]$. 790. $x = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$, $y = e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)$. 791. $x = (2C_2 - C_1)\cos 2t - (2C_1 + C_2)\sin 2t$, $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$. 792. $x = (C_1 + C_2t)e^{3t}$, $y = (C_1 + C_2 + C_2t)e^{3t}$. 793. $x = (C_1 + C_2t)e^t$, $y = (2C_1 - C_2 + 2C_2t)e^t$. 794. $x = (C_1 + 2C_2t)e^{-t}$, $y = (C_1 + C_2 + 2C_2t)e^{-t}$. 795. $x = (C_1 + 3C_2t)e^{2t}$, $y = (C_2 - C_1 - 3C_2t)e^{2t}$. 796. $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$, $y = C_1e^t - 3C_3e^{-t}$, $z = C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}$. 797. $x = C_1 + 3C_2e^{2t}$, $y = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$, $z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}$. 798. $x = C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$, $y = C_1e^t + C_2e^{2t}$, $z = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$. 799. $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$, $y = C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$, $z = -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}$.
800. $x = C_1e^t + C_3e^{-t}$, $y = C_1e^t + C_2e^{2t}$, $z = 2C_2e^{2t} - C_3e^{-t}$. 801. $x = e^t(2C_2 \sin 2t + 2C_3 \cos 2t)$, $y = e^t(C_1 - C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t)$, $z = e^t(-C_1 - 3C_2 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t)$. 802. $x = C_1e^{2t} + e^{3t}(C_2 \cos t + C_3 \sin t)$, $y = e^{3t}[(C_2 + C_3)\cos t + (C_3 - C_2)\sin t]$, $z = C_1e^{2t} + e^{3t}[(2C_2 - C_3)\cos t + (2C_3 + C_2)\sin t]$.
803. $x = C_2 \cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t$, $y = 2C_1e^t + C_2 \cos t + (C_2 + 2C_3)\sin t$, $z = C_1e^t + C_3 \cos t - (C_2 + C_3)\sin t$. 804. $x = C_1e^{2t} + (C_2 + C_3)e^{3t}$, $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$, $z = C_1e^{2t} + C_3e^{3t}$. 805. $x = C_1 + C_2e^t$, $y = 3C_1 + C_3e^t$, $z = -C_1 + (C_2 - C_3)e^t$. 806. $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$, $y = -C_1e^{3t} + (C_2 + 2C_3)e^{-t}$, $z = -3C_1e^{3t} + C_3e^{-t}$.
807. $x = C_1e^{2t} + C_3e^{-5t}$, $y = C_2e^{2t} + 3C_3e^{-5t}$, $z = (C_1 - 2C_2)e^{2t} + 2C_3e^{-5t}$. 808. $x = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{2t}$, $y = (C_1 - 2C_2 + C_2t)e^t$, $z = (C_1 - C_2 + C_2t)e^t + C_3e^{2t}$. 809. $x = (C_2 + C_3t)e^{-t}$, $y = 2C_1e^t - (2C_2 + C_3 + 2C_3t)e^{-t}$, $z = C_1e^t - (C_2 + C_3 + C_3t)e^{-t}$. 810. $x = C_1 + C_2t + 4C_3e^{3t}$, $y = C_2 - 2C_1 - 2C_2t + 4C_3e^{3t}$, $z = C_1 - C_2 + C_2t + C_3e^{3t}$. 811. $x = (C_1 + C_3t)e^t$, $y = (C_2 + 2C_3t)e^t$, $z = (C_1 - C_2 - C_3 - C_3t)e^t$. 812. $x = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^{2t}$, $y = [2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)t + 2C_3t^2]e^{2t}$, $z = [C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3)t + C_3t^2]e^{2t}$. 813. $x = 3C_1e^t + 3C_2e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$, $y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$. 814. $x = -2e^t(C_1 + C_2 + C_2t) - 2e^{-t}(C_3 - C_4 + C_4t)$, $y = e^t(C_1 + C_2t) + e^{-t}(C_3 + C_4t)$.
815. $x = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(C_3 \cos t + C_4 \sin t)$, $y = e^t(C_1 \sin t - C_2 \cos t) + e^{-t}(C_4 \cos t - C_3 \sin t)$. 816. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{2t} + C_5e^{-2t}$, $y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_4e^{2t} + C_6e^{-2t}$, $z = C_1e^t + C_2e^{-t} - (C_3 + C_4)e^{2t} - (C_5 + C_6)e^{-2t}$. 817. $x = 3C_1e^t + C_2e^{-t}$, $y = C_1e^t + C_2e^{-t}$. 818. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + 2C_3e^{-2t}$, $y = 2C_1e^t + C_3e^{-2t}$. 819. $x = 3Ce^{-t}$, $y = Ce^{-t}$. 820. $x = -2C_2e^{3t} + C_3e^t$, $y = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$. 821. $x = 2C_1e^{2t} + 2C_2e^{-2t} + 2C_3 \cos 2t + 2C_4 \sin 2t$, $y = 3C_1e^{2t} - 3C_2e^{-2t} - C_3 \sin 2t + C_4 \cos 2t$. 822. $x = C_1e^{\frac{t}{2}} - 4C_2e^{-2t}$, $y = C_1e^{\frac{t}{2}} + C_2e^{-2t}$. 823. $x = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{-t}$, $y = (-2C_1 - C_2 - 2C_2t)e^t - 4C_3e^{-t}$. 824. $x = C_1e^t +$

$+C_2e^{-t}+C_3e^{2t}+C_4e^{-2t}, \quad y=C_1e^t+5C_2e^{-t}+2C_3e^{2t}+2C_4e^{-2t}$.
825. $x=C_1+C_2e^t+C_3\cos t+C_4\sin t,\ y=-C_1-C_2e^t+\left(\frac{3}{5}C_4-\frac{4}{5}C_3\right)\cos t-\left(\frac{3}{5}C_3+\frac{4}{5}C_4\right)\sin t$. 826. $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+te^t-t^2-2,\ y=C_1e^t-C_2e^{-t}+(t-1)e^t-2t$. 827. $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}-2\sin t-\cos t, \quad y=2C_1e^{2t}-C_2e^{-t}+\sin t+3\cos t$. 828. $x=C_1e^t+2C_2e^{4t}+3e^{5t}, \quad y=-C_1e^t+C_2e^{4t}+e^{5t}$. 829. $x=C_1(\cos 2t-\sin 2t)+C_2(\cos 2t+\sin 2t),\ y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+e^{-2t}$. 830. $x=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+(t+1)e^{2t}, \quad y=-2C_1e^{2t}-C_2e^{3t}-2te^{2t}$. 831. $x=(C_1+2C_2t)e^t-3, \quad y=(C_1+C_2+2C_2t)e^t-2$.
832. $x=C_1e^{2t}+3C_2e^{4t}-e^{-t}-4e^{3t},\ y=C_1e^{2t}+C_2e^{4t}-2e^{-t}-2e^{3t}$.
833. $x=C_1e^t\cos t+C_2e^t\sin t+e^t+t+1,\ y=C_1e^t(-\cos t-\sin t)+C_2e^t(\cos t-\sin t)-2e^t-2t-1$. 834. $x=C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}-\cos t+3\sin t, \quad y=-C_1e^{-t}+C_2e^{2t}+2\cos t-\sin t$. 835. $x=4C_1e^t+C_2e^{-2t}-4te^t, \quad y=C_1e^t+C_2e^{-2t}-(t-1)e^t$. 836. $x=C_1e^{3t}+3t^2+2t+C_2,\ y=-C_1e^{3t}+6t^2-2t+2C_2-2$. 837. $x=2C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-(12t+13)e^t, \quad y=C_1e^{2t}-2C_2e^{-3t}-(8t+6)e^t$.
838. $x=2C_1e^{8t}-2C_2-6t+1, \quad y=3C_1e^{8t}+C_2+3t$. 839. $x=3C_1e^t+C_2e^{-t}+3\sin t, \quad y=C_1e^t+C_2e^{-t}-\cos t+2\sin t$.
840. $x=C_1\cos t+C_2\sin t+t\sin t-t\cos t,\ y=C_1(\sin t+\cos t)+C_2(\sin t-\cos t)-2t\cos t+\sin t+\cos t$. 841. $x=(C_1+C_2t-t^2)e^t,\ y=[C_1-C_2+(C_2+2)t-t^2]e^t$. 842. $x=C_1e^t+3C_2e^{2t}+\cos t-2\sin t, \quad y=C_1e^t+2C_2e^{2t}+2\cos t-2\sin t$. 843. $x=C_1e^t+C_2e^{3t}+te^t-e^{4t}, \quad y=-C_1e^t+C_2e^{3t}-(t+1)e^t-2e^{4t}$.
844. $x=C_1\cos 2t-C_2\sin 2t+2t+2, \quad y=(C_1+2C_2)\cos 2t+(2C_1-C_2)\sin 2t+10t$. 845. $x=C_1e^t+C_2e^{3t}+e^t(2\cos t-\sin t)$, $y=C_1e^t-C_2e^{3t}+e^t(3\cos t+\sin t)$. 846. $x=C_1\cos t+C_2\sin t+\operatorname{tg} t, \quad y=-C_1\sin t+C_2\cos t+2$. 847. $x=C_1e^t+2C_2e^{2t}-e^t\ln(e^{2t}+1)+2e^{2t}\operatorname{arc\,tg} e^t, \quad y=C_1e^t+3C_2e^{2t}-e^t\ln(e^{2t}+1)+3e^{2t}\operatorname{arc\,tg} e^t$. 848. $x=C_1+2C_2e^{-t}+2e^{-t}\ln|e^t-1|,\ y=-2C_1-3C_2e^{-t}-3e^{-t}\ln|e^t-1|$. 849. $x=C_1\cos t+C_2\sin t+t(\cos t+\sin t)+(\cos t-\sin t)\ln|\cos t|, \quad y=(C_1-C_2)\cos t+(C_1+C_2)\sin t+2\cos t\ln|\cos t|+2t\sin t$. 850. $x=(C_1+2C_2t-8t^{5/2})e^t$, $y=(C_1+2C_2t-C_2-8t^{5/2}+10t^{3/2})e^t$. 851. $x=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+C_2e^{3t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. 852. $x=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. 853. $x=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}2t\\2t-1\end{pmatrix}$. 854. $x=C_1e^t\begin{pmatrix}\cos 2t\\\cos 2t+\sin 2t\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}\sin 2t\\\sin 2t-\cos 2t\end{pmatrix}$. 855. $x=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+$

$$+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$ **856.** $$x=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

857. $$x=C_1e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2\cos t\\2\cos t\\3\cos t-\sin t\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}2\sin t\\2\sin t\\3\sin t+\cos t\end{pmatrix}.$$

858. $$x=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\-\sin 2t\\\cos 2t\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}\sin 2t\\\cos 2t\\\sin 2t\end{pmatrix}.$$

859. $$x=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{t}\begin{pmatrix}\cos t-\sin t\\\cos t\\\sin t\end{pmatrix}+C_3e^{t}\begin{pmatrix}\cos t+\sin t\\\sin t\\-\cos t\end{pmatrix}.$$

860. $$x=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+C_3e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$ **861.** $$x=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$ **862.** $$x=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+C_3e^{t}\begin{pmatrix}1\\t+1\\-t\end{pmatrix}.$$ **863.** $$x=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+C_2e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^{t}\begin{pmatrix}2t\\2t\\2t+1\end{pmatrix}.$$

864. $$x=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}t+1\\t\\2t\end{pmatrix}.$$ **865.** $$x=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_3e^{2t}\begin{pmatrix}2t+1\\t\\3t\end{pmatrix}.$$ **866.** $$x=C_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}t\\t-1\\2t-1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}t^2\\t^2-2t+2\\2t^2-2t\end{pmatrix}.$$ **867.** $$\begin{pmatrix}e^3&0\\0&e^{-2}\end{pmatrix}.$$

868. $$\begin{pmatrix}\cos 1&\sin 1\\-\sin 1&\cos 1\end{pmatrix}.$$ **869.** $$\begin{pmatrix}e^2&e^2\\0&e^2\end{pmatrix}.$$ **870.** $$\begin{pmatrix}2e^2-e&e-e^2\\2e^2-2e&2e-e^2\end{pmatrix}.$$

871. $$\begin{pmatrix}-1&-4\\1&3\end{pmatrix}.$$ **872.** $$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&e^2\end{pmatrix}.$$ **873.** $$\begin{pmatrix}e^2&e^2&\frac{e^2}{2}\\0&e^2&e^2\\0&0&e^2\end{pmatrix}.$$ **874.** e^2. **875.** e^{-1}.

876. $x=d\cos at$, $y=\frac{v}{a}\sin at$; l'ellipse $\left(\frac{x}{d}\right)^2+\left(\frac{ay}{v}\right)^2=1$.

877. $x=C_1\sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}+C_2\right)$, $y=\frac{3}{2}C_1\sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}+C_2\right)$; $x=C_3\sin(at+C_4)$, $y=-C_3\sin(at+C_4)$. **878.** $\frac{1}{2\pi}\sqrt{K\left(\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}\right)}$. **879.** $I=A\sin(\omega t-\varphi)$, $A=\frac{V}{\sqrt{R^2+(\omega L/(1-\omega^2 LC))^2}}$; $\max A=\frac{V}{R}$ pour $\omega=0$ et $\omega=\infty$, $\min A=0$ pour $\omega^2=\frac{1}{LC}$. **880.** $\lambda\neq\frac{2\pi k}{\omega}i$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **881.** a) instable; b) stable; c) stable; d) instable. **882.** Asymptotiquement stable. **883.** Instable. **884.** Instable. **885.** Stable. **886.** Stable. **887.** Instable. **888.** Stable. **889.** Toutes les solutions tendent vers zéro. Non, non. **890.** Stable. **891.** Asymptotiquement stable. **892.** Instable. **898.** Non. **899.** Stable. **900.** Instable. **901.** Instable. **902.** Stable. **903.** Instable. **904.** Stable. **905.** Stable. **906.** Instable. **907.** $-2<a<-1$. **908.** $a<-1$. **909.** $ab<-3$. **910.** $a<b<-1$. **911.** $0<a<2$. **912.** $-be<a<-e$. **913.** Stable. **914.** Instable. **915.** (0, 0) est instable, (1, 2) est stable. **916.** (1, 2) et (2, -1) sont instables. **917.** $(2k\pi, 0)$ sont instables, $((2k+1)\pi, 0)$ sont stables. **918.** (3, 2) est instable, (0, -1) est stable. **919.** (2, 1) est stable, (-2, 1) est instable. **920.** (1, 1) est instable, (-4, -4) est stable. **921.** $(2k\pi, 0)$ sont instables, $((2k+1)\pi, 0)$ sont stables. **922.** $(-1, 2k\pi)$ sont stables, $(-1, (2k+1)\pi)$ sont instables. **923.** Instable. **924.** Stable. **925.** Stable. **926.** Instable. **927.** Stable. **928.** Stable. **929.** Instable. **930.** Stable. **931.** Stable. **932.** Instable. **933.** Stable. **934.** Stable. **935.** Instable. **936.** Stable. **937.** Instable. **938.** Instable. **939.** Instable. **940.** Stable. **941.** Instable. **942.** Stable. **943.** Instable. **944.** Instable. **945.** Stable. **946.** Instable. **947.** Stable. **948.** Instable. **949.** $a>0$, $b>0$, $ab>2$. **950.** $3a>b>0$. **951.** $0<a<2$. **952.** Instable pour tous les a. **953.** $a>0$, $b>0$, $a+b<1$. **954.** $b>0$, $a>b+1$. **955.** $a>0$, $b>0$, $8a-a^2b>4$. **956.** $a>2$, $b>0$, $2ab-b^2>4$. **957.** $a>0$, $b>0$, $2-\sqrt{3}<\frac{a}{b}<2+\sqrt{3}$. **958.** $0<a<8$, $0<b<8a-a^2$. **959.** a) stable; b) stable; c) instable; d) instable; e) instable; f) stable. **960.** $-4<ab<0$ et $a=b=0$. **961.** Col. **962.** Nœud. **963.** Foyer. **964.** Nœud. **965.** Col. **966.** Centre. **967.** Nœud dégénéré. **968.** Nœud. **969.** Nœud singulier. **970.** Foyer. **971.** Nœud. **972.** Nœud dégénéré. **973.** Foyer. **974.** Col. **975.** Centre. **976.** Nœud dégénéré. **977** et **978.** Les points singuliers couvrent une droite. **979.** (-2, -1) est un nœud. **980.** (1, -2) est un foyer. **981.** (4, 2) est un nœud, (-2, -1), un foyer. **982.** (1, 0) est un nœud singulier, (-1, 0), un col. **983.** (1, 1) est un foyer, (-1, -1), un col. **984.** (0, -1) est un nœud dégénéré, (2, -3), un col. **985.** (2, 4) est un nœud, (-1, 1), un col. **986.** (1, 1) est un foyer, (-1, -1), un col. **987.** (2, 1) est un nœud, (1, 2), un col, (-1, -2), un foyer.

988. (1, —1) est un foyer, (0, —2), un col, (—2, 2), un nœud. **989.** (—2, 4) est un nœud, (1, 1), un foyer, (2, 4) et (—1, 1), des cols. **990.** (—2, 2) est un nœud dégénéré, (1, —1), un foyer, (2, 2) et (—1, —1), des cols. **991.** (3, 0) est un foyer, (1, 1), un nœud, (—1, 1) et (—3, 0), des cols. **992.** (0, 1) et (0, —1) sont des cols, (—1, 0), un foyer, (3, 2), un nœud. **993.** Dans le domaine $y > 0$ les courbes intégrales sont disposées comme dans le cas d'un col et dans le domaine $y < 0$, comme dans celui d'un nœud. **994.** Par (0, 0) passe une seule courbe pour laquelle ce point est un point de rebroussement de première espèce. Les autres courbes n'aboutissent pas au point singulier. **995.** Toutes les courbes provenant du domaine $y < 0$ aboutissent par les deux extrémités au point singulier, aucune courbe provenant du domaine $y > 0$ n'y aboutit. **996.** Par le point singulier passent deux courbes intégrales tangentes. Toutes les autres courbes sont disposées comme dans le cas d'un col. **997.** Les courbes provenant du domaine $y > 0$ n'aboutissent pas au point singulier. La disposition des courbes dans le domaine $y < 0$, $x < 0$ rappelle un nœud dégénéré et dans le domaine $y < 0$, $x > 0$, un col. **1021.** (0, 1) est un col, (0, —1), un foyer. **1022.** (1, 2) est un col, (—1, 2), un nœud. **1023.** (1, 0) est un col, (0, 2), un nœud dégénéré. **1024.** (0, 1) est un centre, (0, —1), un col. **1025.** (2, 2) est un nœud, (0, —2), un col, (—1, —1), un foyer. **1026.** (2, 2) est un col, (4, 1) et (—2, —2), des foyers. **1027.** (1, 0) et (—1, 0) sont des cols, (0, 1) et (0, —1), des centres. **1028.** (1, 1) est un col, (1, —1) un nœud, (2, 2) et (—2, 2) des foyers. **1029.** (0, 1) et (0, —1) sont des cols, (1, 0), un foyer, (—3, 2), un nœud. **1030.** (1, —1) et (—1, 1) sont des nœuds, (3, 3) et (—3, —3), des cols. **1031.** (1, —1) et (—1, 1) sont des cols, (3, 3) et (—3, —3), des nœuds. **1032.** (0, 0) est un foyer, (7, 1), un nœud, (0, 8) et (3, —1), des cols. **1033.** (0, 0) est un foyer, (2, 4), un nœud, (1, 1) et (—1, 1), des cols. **1034.** (2, 1) est un nœud, (—1, 2), un foyer, (1, 2) et (1, —2), des cols. **1035.** $l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$. **1036.** $ml\ddot{\varphi} + kl^2\dot{\varphi}\,|\dot{\varphi}| + mg \sin \varphi = 0$. **1037.** $\ddot{\varphi} + \sin \varphi = \frac{1}{2}$. **1038.** $m\ddot{x} + f \operatorname{sign} \dot{x} + kx = 0$. **1039.** De $(L/l)^3$ fois. **1047.** $f(r_0) = 0$; quand r croît, la fonction $f(r)$ change son signe plus en moins; son signe moins en plus; elle ne change pas de signe en passant par zéro. **1048.** $a < -1/2$; $a > -1/2$. **1053.** $x = \pm b \operatorname{cth} \frac{\pi a}{2\sqrt{1-a^2}}$. **1054.** $\dot{x} = y$; $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = -2yF(y) < 0$ pour $y \neq 0$. **1056.** De moins de 0,03. **1057.** De moins de $0{,}05\,(e^{2T} - 1)$. **1058.** L'erreur est inférieure à 0,081. **1059.** $|\tilde{y} - y| < 0{,}015$. **1060.** $|\tilde{x} - x| + |\tilde{y} - y| < 0{,}0012$. **1061.** $|\tilde{y} - y| < 0{,}002$.

1062. $|\tilde{y}-y|<0{,}015$. **1063.** $|\tilde{y}-y|<0{,}034$. **1064.** $e^{2x}-x-1$. **1065.** $\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x+1$. **1066.** e^{x-2}. **1067.** $t\,(e^{-1}-e^{-t})$. **1068.** $\frac{1-t-\ln(1-t)}{(1-t)^2}$. **1069.** t^8. **1070.** $t^2\ln t+2t^2-2t$. **1071.** $-e^{2t}-2e^{-t}-3e^{-2t}$. **1072.** $-\frac{e^{2t}}{72}-\frac{e^{-2t}}{4}+\left(\frac{5}{36}-\frac{t}{3}\right)e^{-t}+\frac{1}{8}$. **1073.** $\frac{t^2}{3}-\frac{1}{3t}$. **1074.** $y=\frac{1}{x}+\mu\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+\mu^2\left(-\frac{x^5}{7}+\frac{2x}{3}-\frac{32}{21x^2}-\frac{1}{x^3}\right)+O(\mu^3)$. **1075.** $y=2\sqrt{x}+2\mu\,(x^{-1/2}-x^2)+\mu^2\left(\frac{1}{4}x^{7/2}-\frac{4}{3}x+\frac{25}{12}x^{-1/2}-x^{-3/2}\right)+O(\mu^3)$. **1076.** $y=1+\mu\,(x^2-x)+\mu^2x\times(1-x)^3/6+O(\mu^3)$. **1077.** $y=\frac{1}{x}+3\mu+\mu^2\left(\frac{3}{x^2}-3x\right)+O(\mu^3)$. **1078.** $y=x-\mu\,(x+1)+(\mu^2/2)\,(e^x-x^2-2x-1)+O(\mu^3)$. **1079.** $x=\sin t+\mu\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)+\mu^2\left(\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{6}\sin 3t\right)+O(\mu^3)$. **1080.** $x=\cos 2t+\mu\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{22}\cos 4t\right)+\mu^2\left(\frac{17}{110}\cos 2t+\frac{1}{682}\cos 6t\right)+O(\mu^3)$. **1081.** $x=\mu\cos t+\mu^3\left(-\frac{3}{8}\cos t+\frac{1}{24}\cos 3t\right)+O(\mu^5)$. **1082.** $x_1=1+\mu\sin t-\frac{\mu^2}{4}(1+\cos 2t)+O(\mu^3)$, $x_2=-1-\frac{\mu}{3}\sin t+\frac{\mu^2}{36}\left(1-\frac{1}{3}\cos 2t\right)+O(\mu^3)$. **1083.** $x_1=-\frac{\mu}{3}\sin 2t+\frac{\mu^3}{648}\left(\sin 2t-\frac{1}{35}\sin 6t\right)+O(\mu^5)$, $x_2=\pi-\frac{\mu}{5}\sin 2t-\frac{\mu^3}{1000}\times\left(\frac{1}{5}\sin 2t-\frac{1}{111}\sin 6t\right)+O(\mu^5)$. **1084.** $x=\frac{1}{8}\sin t+\frac{1}{3}\sin 2t-\frac{1}{8}\sin 3t+O(\mu)$. **1085.** $x=2\mu^{\frac{1}{3}}\sin t-\mu\left(\frac{1}{12}\sin t+\frac{1}{4}\sin 3t\right)+O(\mu^{\frac{5}{3}})$. **1086.** $x=C\cos\tau+C^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos\tau-\frac{1}{6}\cos 2\tau\right)+O(C^3)$, $\tau=t\left(1-\frac{5}{12}C^2+O(C^3)\right)+C_2$. **1087.** $x=C\cos\tau+\frac{C^3}{32}(\cos 3\tau-\cos\tau)+O(C^5)$, $\tau=t\left(1+\frac{3}{8}C^2+O(C^4)\right)+C_2$. **1088.** $x=C\cos\tau+\frac{C^3}{192}(\cos\tau-\cos 3\tau)+O(C^5)$, $\tau=t\left(1-\frac{C^2}{16}+O(C^4)\right)+C_2$. **1089.** $x=2\cos\tau-\frac{\mu}{4}\sin 3\tau+O(\mu^2)$, $\tau=t\left(1-\frac{\mu^2}{16}+O(\mu^4)\right)+C$. **1090.** $x=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\tau+\frac{\mu}{12\sqrt{3}}\sin 3\tau+O(\mu^2)$, $\tau=\left(1-\frac{\mu^2}{16}+O(\mu^3)\right)t+C$. **1091.** $y=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{7x^4}{12}+\ldots$ **1092.** $y=1+x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3}+\ldots$ **1093.** $y=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{6}+\ldots$

1094. $y=x+x^2-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{4}-\ldots$ **1095.** $y=1+2(x-1)+4(x-1)^2+\frac{25}{3}(x-1)^3+\frac{81}{4}(x-1)^4+\ldots$ **1096.** $y=1+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3}-\ldots$ **1097.** $y=4-2x+2x^2-2x^3+\frac{19}{6}x^4+\ldots$ **1098.** $R>0{,}73$. **1099.** L'erreur est inférieure à 0,00024. **1100.** $y_1=1+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}+\ldots$, $y_2=x+\frac{x^5}{4\cdot 5}+\frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}+\ldots$ **1101.** $y_1=1+\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{1\cdot 3}+\frac{x^6}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots$, $y_2=x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots=xe^{\frac{x^2}{2}}$. **1102.** $y_1=1+x^2+x^4+\ldots=\frac{1}{1-x^2}$, $y_2=x+x^3+x^5+\ldots=\frac{x}{1-x^2}$. **1103.** $y_1=1-\frac{3}{2}x^2+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^4-\ldots=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$, $y_2=x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}x^5-\ldots$ **1104.** $y_1=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}-\frac{11x^4}{24}-\ldots$, $y_2=x+x^2+\frac{5x^3}{6}+\frac{3x^4}{4}+\ldots$ **1105.** $y_1=1+x-x^3-x^4+x^6+x^7-\ldots=\frac{1}{1-x+x^2}$, $y_2=xy_1$. **1106.** $y_1=1-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\ldots$, $y_2=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+\ldots$ **1107.** $y_1=1-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\ldots$, $y_2=x-\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{180}+\ldots$ **1108.** $y_1=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{5x^4}{72}+\ldots$, $y_2=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\ldots$ **1109.** $y_1=1-\frac{x^3}{6}+\ldots$, $y_2=x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}+\ldots$, $y_3=x^2+\frac{x^4}{4}-\ldots$ **1110.** $y_1=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots=\frac{\sin x}{x}$, $y_2=\frac{1}{x}-\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}-\ldots=\frac{\cos x}{x}$. **1111.** $y_1=\frac{1}{x}+1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots=\frac{e^x}{x}$, $y_2=|x|^{1/2}\left(1+\frac{2x}{5}+\frac{(2x)^2}{5\cdot 7}+\frac{(2x)^3}{5\cdot 7\cdot 9}+\ldots\right)$. **1112.** $y_1=x^{1/3}\left(1+\frac{x^2}{5\cdot 6}+\frac{x^4}{5\cdot 6\cdot 11\cdot 12}+\ldots\right)$, $y_2=x^{2/3}\left(1+\frac{x^2}{6\cdot 7}+\frac{x^4}{6\cdot 7\cdot 12\cdot 13}+\ldots\right)$. **1113.** $y_1=\frac{1}{x}+1+\frac{x}{2}$, $y_2=x^2+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{4\cdot 5}+\frac{x^5}{4\cdot 5\cdot 6}+\ldots=6\left(\frac{e^x-1}{x}-1-\frac{x}{2}\right)$. **1114.** $y_1=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{40}+\frac{7x^4}{720}+\ldots$, $y_2=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{5}+\frac{x^4}{20}+\ldots$ **1115.** $y_1=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\ldots=xe^x$. **1116.** $y_1=1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots$ **1117.** $y_2=\left(1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+\ldots\right)\ln|x|-\frac{x^2}{4}-\frac{3x^4}{128}-\ldots$ **1118.** y_1 et y_2 sont des séries entières généralisées d'exposants irrationnels. **1119.** y_1 et y_2 sont des séries

d'exposants complexes. **1120.** Il n'y a pas de solutions sous forme de séries entières généralisées du fait que la série obtenue $y=1+1!\,x+2!\,x^2+3!\,x^3+\ldots$ possède un rayon de convergence nul. **1121.** $y=-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2(k^2-k+1)}$. **1122.** $y=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16k^4-4k^2+1}\left(\cos 2kx-\frac{2k}{4k^2-1}\sin 2kx\right)$. **1123.** $y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k^3+k)\cos kx-\sin kx}{2^k[(k^3+k)^2+1]}$. **1124.** $y=-\frac{1}{6\pi^2}+\frac{1}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k\pi x}{k^2(4k^2+1)}$.
1125. $y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{k^2(9-4k^2)}+C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$. **1136.** $1\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$.
1137. $1+x^2<y<1+x^2+\operatorname{arc\,tg} x$. **1141.** $y=C_2e^{C_1x^2}$, $z=\frac{1}{2C_1C_2}e^{-C_1x^2}$. **1142.** $y=C_2e^{C_1x}$, $z=x+\frac{C_2}{C_1}e^{C_1x}$; $y=0$, $z=x+C$.
1143. $y=\frac{x+C_1}{x+C_2}$, $z=\frac{(C_2-C_1)x}{(x+C_2)^2}$. **1144.** $y=C_2e^{C_1x^2}$, $z=\frac{2C_1}{C_2}xe^{-C_1x^2}$; $y=0$, $z=Cx$. **1145.** $y=-\frac{1}{C_1}+\frac{C_1}{2}(x+C_2)-\frac{C_1}{4}(x+C_2)^2$, $z=\frac{C_1}{4}(x+C_2)^2+\frac{1}{C_1}$. **1146.** $y=C_1z$, $x=2y-z+C_2$. **1147.** $x^2-y^2=C_1$, $x+y=C_2z$. **1148.** $x-y=C_1(y-z)$, $(x+y+z)(x-y)^2=C_2$. **1149.** $x+z=C_1$, $(x+y+z)(y-3x-z)=C_2$. **1150.** $x^2-z^2=C_1$, $y^2-u^2=C_2$, $(x+z)=C_3(u+y)$.
1151. $x+z=C_1$, $y+u=C_2$, $(x-z)^2+(y-u)^2=C_3$. **1152.** $x^2-2y=C_1$, $6xy-2x^3-3z^2=C_2$. **1153.** $y^2+z^2=C_1$, $x-yz=C_2$.
1154. $x=C_1y$, $xy-z=C_2x$. **1155.** $x=C_1y$, $xy-2\sqrt{z^2+1}=C_2$.
1156. $y=C_1z$, $x-y^2-z^2=C_2z$. **1157.** $y^2+z^2=C_1$, $x(y-z)=C_2$.
1158. $xz=C_1$, $xy+z^2=C_2$. **1159.** $x+z-y=C_1$, $\ln|x|+\frac{z}{y}=C_2$.
1160. $x^2+y^2+z^2=C_1$, $yz=C_2x$. **1161.** 1) Oui. 2) Non. **1162.** 1) Non. 2) Oui. **1163.** Oui. **1164.** Dépendantes. **1167.** $z=f(x^2+y^2)$.
1168. $z=f(xy+y^2)$. **1169.** $u=f(y/x,\ z/x)$. **1170.** $u=f((x-y)/z,\ (x+y+2z)^2/z)$. **1171.** $F(x^2-y^2,\ x-y+z)=0$. **1172.** $F\left(e^{-x}-y^{-1},\ z+\frac{x-\ln|y|}{e^{-x}-y^{-1}}\right)=0$. **1173.** $F(x^2-4z,\ (x+y)^2/x)=0$. **1174.** $F(x^2+y^2,\ z/x)=0$. **1175.** $F\left(\frac{x^2}{y},\ xy-\frac{3z}{x}\right)=0$. **1176.** $F\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z},\ \frac{1}{x-y}+\frac{1}{z}\right)=0$. **1177.** $F\left(x^2+y^4,\ y\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)\right)=0$. **1178.** $F\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\ \ln|xy|-\frac{z^2}{2}\right)=0$. **1179.** $F(x^2+y^2,$

$\operatorname{arc\,tg}(x/y)+(z+1)e^{-z})=0$. **1180.** $F(z^2-y^2,\ x^2+(y-z)^2)=0$. **1181.** $F\left(\frac{z}{x},\ 2x-4z-y^2\right)=0$. **1182.** $F(z-\ln|x|,\ 2x(z-1)-y^2)=0$. **1183.** $F(\operatorname{tg} z+\operatorname{cotg} x,\ 2y+2\operatorname{tg} z\cdot\operatorname{cotg} x+\operatorname{cotg}^2 x)=0$. **1184.** $F((x+y+z)/(x-y)^2,\ (x-y)(x+y-2z))=0$. **1185.** $F((x-y)\times(z+1),\ (x+y)(z-1))=0$. **1186.** $F(u(x-y),\ u(y-z),\ (x+y+z)/u^2))=0$. **1187.** $F(x/y,\ xy-2u,\ (z+u-xy)/x))=0$. **1188.** $F((x-y)/z,\ (2u+x+y)z,\ (u-x-y)/z^2))=0$. **1189.** $z=2xy$. **1190.** $z=ye^x-e^{2x}+1$. **1191.** $z=y^2e^{2\sqrt{x}-2}$. **1192.** $u=(1-x+y)(2-2x+z)$. **1193.** $u=(xy-2z)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$. **1194.** $y^2-x^2-\ln\sqrt{y^2-x^2}=z-\ln|y|$. **1195.** $2x^2(y+1)=y^2+4z-1$. **1196.** $(x+2y)^2=2x(z+xy)$. **1197.** $\sqrt{z/y^3}\sin x=\sin\sqrt{z/y}$. **1198.** $2xy+1=x+3y+z^{-1}$. **1199.** $x-2y=x^2+y^2+z$. **1200.** $2x^2-y^2-z^2=a^2$. **1201.** $[(y^2z-2)^2-x^2+z]\,y^2z=1$. **1202.** $x^2+z^2=5(xz-y)$. **1203.** $3(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$. **1204.** $xz=(xz-y-x+2z)^2$. **1205.** $(1+yz)^3=3yz(1+yz-x)+y^3$. **1206.** $x+y+z=0$. **1207.** $2(x^3-4z^3-3yz)^2=9(y+z^2)^3$. **1208.** $(x-y)\times(3x+y+4z)=4z$. **1209.** $xz+y^2=0$. **1210.** $z=xy+f(y/x)$, où f est une fonction différentiable arbitraire, pour laquelle $f(1)=0$. **1211.** $F(x^2-y^2,\ 2x^2+z^2)=0$. **1212.** $2y^2+z^2=z(x^2+y^2+z^2)$. **1213.** $F(bx-ay,\ cx-az)=0$. **1214.** $x^2+3y^2+z^2+3xy+xz+3yz=1$. **1215.** $F((y-b)/(x-a),\ (z-c)/(x-a))=0$. **1216.** $F((x^2/y,\ z/y))=0$. **1217.** $z=Cxy^2$. **1218.** Pas de solutions. **1219.** $z=0$. **1220.** Pas de solutions. **1221.** $x^3y^2z=C$. **1222.** $z=y^2-xy$. **1223.** $x^2yz=C-x^3$; $x=0$.

Tables de la fonction exponentielle e^x et des logarithmes

Table 1

x	e^x	x	$\ln x$	$\lg x$
0,00	1,000	1,0	0,000	0,000
0,05	1,051	1,1	0,095	0,041
0,10	1,105	1,2	0,182	0,079
0,15	1,162	1,3	0,262	0,114
0,20	1,221	1,4	0,336	0,146
0,25	1,284	1,5	0,405	0,176
0,30	1,350	1,6	0,470	0,204
0,35	1,419	1,7	0,531	0,230
0,40	1,492	1,8	0,588	0,255
0,45	1,568	1,9	0,642	0,279
0,50	1,649	2,0	0,693	0,301

Table 2

x	e^x	x	$\ln x$	$\lg x$
—3	0,050	3	1,099	0,477
—2	0,135	4	1,386	0,602
—1	0,368	5	1,609	0,699
0	1,000	6	1,792	0,778
1	2,718	7	1,946	0,845
2	7,389	8	2,079	0,903
3	20,09	9	2,197	0,954
4	54,60	10	2,303	1,000
5	148,4	11	2,398	1,041
π	23,14	20	2,996	1,301
2π	535,5	100	4,605	2,000

Pour calculer les fonctions pour des valeurs intermédiaires de l'argument on peut procéder à l'interpolation linéaire dans la *table 1*.

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur la traduction et la présentation de ce livre ainsi que toute autre suggestion que vous voudriez formuler

Ecrire à l'adresse:
Pervi Rijski péréoulok, 2,
Moscou, 1-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique

